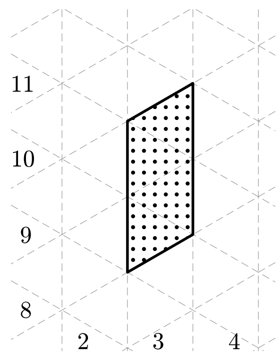
Bontsuk esetekre a feladatot aszerint, hogy egy paralelogramma hány oldala illeszkedik rácsvonalra.

1. eset: Mind a négy oldal rácsvonalra illeszkedik.

Mivel a paralelogramma területe $\sqrt{3}$, ezért 4 rácsháromszöget tartalmaz. Vagyis ekkor a paralelogramma belsejében lévő rácsvonalak összhossza 3 (*1. ábra*).

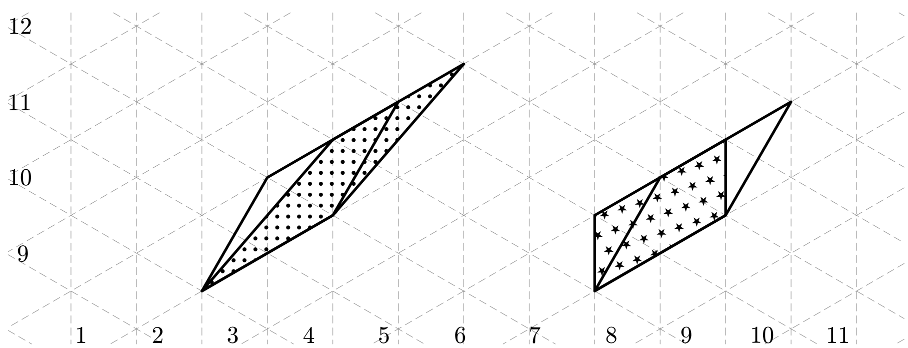


1. ábra

2. eset: Két oldal (nevezzük őket alapoknak) illeszkedik rácsvonalra. Mivel a paralelogramma magassága minimum $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hiszen két párhuzamos rácsvonal között legalább ekkora a távolság), ezért az alapok hossza csak 1 vagy 2 lehet.

2.a eset: Az alapok hossza 2.

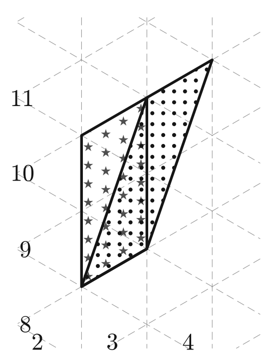
Vegyük észre, hogy ha egy paralelogrammát „eltolunk” egy egységgel (például a *2. ábrán* a pontozottat a simába), akkor nem változik a belső rácsvonalak összege (hiszen a „leeső”, és „bekerülő” háromszögek egybevágóak, eltolhatók egymásba, és ugyanannyi bennük a rácsvonalak összege). Ez csak akkor nem igaz, ha a keletkező paralelogramma mindegyik oldala rácsegyenesre illeszkedik, hiszen ekkor „elvész” az oldal a paralelogramma belsejéből, vagyis ebben az esetben 1-gyel csökken az összhossz (például a *2. ábrán* a sima paralelogrammából a csillagosba való „eltolásnál”).



2. ábra

Vagyis az összes ebbe az esetbe illő paralelogrammát eltolhatjuk egy teljesen rácsvonalakra illeszkedő paralelogrammába úgy, hogy közben 1-gyel csökken a belső rácsvonalak összege. Tehát ekkor $3 + 1 = 4$ a belső rácsvonalak összhossza.

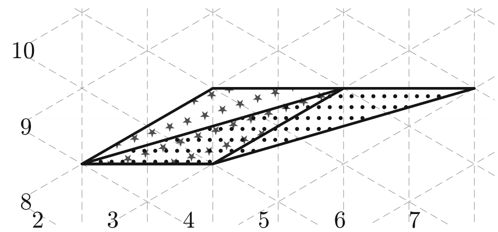
2.b eset: Az alapok hossza 1 (*3. ábra*).



3. ábra

Ekkor továbbra is igaz, hogy szabadon tologathatjuk a paralelogrammát, azonban a végén (amikor egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek minden oldala illeszkedik egy rácsegyenesre) a rácsvonalak összege 2-vel csökken. Vagyis ekkor $3 + 2 = 5$ a belső rácsvonalak összhossza.

3. eset: Nincs rácsvonalra illeszkedő oldala a paralelogrammának. Itt is igaz, hogy eltolhatjuk a paralelogrammát (nem feltétlenül egy egységgel), amíg egy olyat nem kapunk, amelynek az egyik oldala már rácsvonalra illeszkedik (*4. ábra*).



4. ábra

Ekkor egy 2. esetbeli paralelogrammát kapunk (hiszen az eltolás nem változtat a paralelogramma területén), vagyis kétféle lehet:

– Ha az alapja 2, akkor az eltolás során 2-vel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $4+2=6$ volt.

– Ha az alapja 1, akkor az eltolás során 1-gyel csökkent a belső rácsvonalak összhossza, vagyis kezdetben $5+1=6$ volt.

Tehát ebben az esetben mindig 6 a belső rácsvonalak összhossza

Tehát egy $\sqrt{3}$ területű paralelogrammában a rácsvonalak összhossza 3, 4, 5 vagy 6 lehet.

Tóth Viktor (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. évf.)