

I. megoldás. A feladat nehézsége abban rejlik, hogy a fémgömbök eredetileg fennálló gömbszimmetriáját elrontja a Q ponttöltés jelenléte. Emiatt a gömbökön kialakuló töltéeloszlás erősen inhomogén lesz, és az elektromos mező szerkezete is meglehetősen bonyolult. Szerencsére a töltéeloszlás meghatározása elkerülhető, amint azt az alábbi megoldásban látni fogjuk.

Jelöljük a kis fémgömb pillanatnyi töltését q_1 -gyel, a nagyobb gömbét q_2 -vel, a ponttöltés pillanatnyi távolságát a gömbök középpontjától pedig r -rel! A kisebb fémgömb potenciálja a földelés miatt nulla, és mivel a fém ekvipotenciális, ugyanez a középpontjára is igaz. A gömbökön elhelyezkedő töltések azonos (R , illetve $3R$) távolságra helyezkednek el a gömbök közös középpontjától, ezért itt a potenciált könnyen felírhatjuk:

$$(1) \quad k \frac{q_1}{R} + k \frac{Q}{r} + k \frac{q_2}{3R} = 0.$$

A nagy gömbön kívül a földelés miatt nincs elektromos tér (a belső töltések terét a nagy gömb teljesen leárnyékolja), így a Gauss-törvény értelmében a rendszer össztöltése nulla:

$$(2) \quad Q + q_1 + q_2 = 0.$$

A fenti két egyenletből a kisebb gömb töltésének abszolút értéke kifejezhető r függvényében:

$$(3) \quad q_1(r) = - \left(\frac{3R}{2r} - \frac{1}{2} \right) Q.$$

Mivel a gömbök össztöltése állandó ($-Q$), így a ponttöltés mozgása közben csak a gömbök közötti vezetékben folyik áram, a földbe jutó vezetékben nem. A kis gömbre vonatkozó kontinuitási egyenletből a gömbök között folyó áram deriválással (vagy a kis megváltozásokra érvényes formulák segítségével) meghatározható:

$$I = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dq_1}{dr} = v \frac{dq_1}{dr} = \frac{3}{2} \frac{QvR}{r^2},$$

az áram iránya pedig a kis gömb felé mutat. Tehát az áramerősség értéke, amikor a ponttöltés éppen $r = 2R$ távolságra van a gömbök középpontjától:

$$I = \frac{3}{8} \frac{Qv}{R}.$$

II. megoldás. Az első megoldás kulcsa az volt, hogy észrevettük: a potenciál értéke könnyen kiszámítható a gömbök közös középpontjában. Az (1) és (2) egyenletekhez más módon, a szuperpozíciós elv segítségével is eljuthatunk.

Képzeld el, hogy a gömbök középpontjától r távolságra elhelyezkedő Q ponttöltést gondolatban N -edrésszére csökkentjük. Ekkor a gömbök q_1 és q_2 töltése is N -edrésszére csökken. Forgassuk el ezt az elrendezést a gömbök középpontja körül egy kicsit, és szuperponáljuk rá az eredeti elrendezésre! Így már két Q/N ponttöltés helyezkedik el a középponttól r távolságra, a gömbök töltése pedig rendre $2q_1/N$ és $2q_2/N$. Ismételjük meg ezt az eljárást még $(N-2)$ -ször úgy, hogy végül összesen Q töltés legyen az r sugarú gömbfelületen, a lehető legegyszerűbben elrendeződésben. Az $N \rightarrow \infty$ határesetben a ponttöltést ilyen módon végül „szétkenhetjük” egy r sugarú, egyenletes felületi töltéssűrűségű, Q össztöltésű gömbhéjjá, miközben a fémgömbök q_1 és q_2 töltése változatlan marad. Ennek az az előnye, hogy az eredeti feladatot visszavezettük egy könnyebb, gömbszimmetrikus problémára.

Ismert, hogy egy egyenletesen töltött gömbhéj potenciálja kívül úgy számítható, mintha a gömb töltése a középpontjában összpontosulna, belül pedig ugyanakkora, mint a gömb felületén. A legkülső, földelt gömb felületén tehát a potenciált a három (q_1 , Q és q_2 töltésű) gömbhéj potenciáljának összegeként kaphatjuk meg:

$$k \frac{q_1}{3R} + k \frac{Q}{3R} + k \frac{q_2}{3R} = 0,$$

ami ekvivalens a (2) egyenlettel. A kis gömb felületén a (szintén nulla) potenciált teljesen hasonlóan, három tag összegeként írhatjuk fel: a legkülső gömb járuléka $kq_2/(3R)$, a „szétkent” ponttöltésé kQ/r , míg a legbelső gömbé kq_1/R . Ez végül az (1) egyenletre vezet. Az (1) és (2) egyenletek birtokában a végeredményhez az I. megoldással azonos módon juthatunk el.

Megjegyzés. Az egyik második díjat nyert versenyző, *Marozsák Tóbiás* egy harmadik úton oldotta meg a feladatot. Ismert, hogy ha egy földelt, vezető gömbhéj közelébe egy ponttöltést helyezünk, akkor a gömbön megosztott töltések helyettesíthetők egy, a gömbfelület ponttöltéssel átellenes oldalán elhelyezett tükörtöltéssel. Ennek a tükörtöltésnek a nagysága és helyzete kiszámolható abból a feltételből, hogy a gömb teljes felülete nulla potenciálú. A feladatban szereplő két, koncentrikus gömbhéj esetén a Q töltést először „tükröznünk” kell mindkét gömbre, majd az így kapott tükörtöltésekkel is folytatni kell az eljárást. Végül váltakozó előjelű tükörtöltések végtelen sorát kapjuk a kis gömbön belül és a nagy gömbön kívül. A kis gömbön belüli tükörtöltések össztöltése (azaz q_1) egy geometriai sor felösszegzésével kiszámítható, és így közvetlenül a (3) egyenlethez jutunk. Bár ez a módszer matematikailag sokkal nehezebb, mint a fenti két, részletesen ismertetett megoldás, elvben lehetőséget ad a gömbök között kialakuló elektromos tér (legalább numerikus) meghatározására is.