

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c \leq d$. A számnégyesben szereplő 1-esek száma szerint öt eset lehetséges.

1. eset: a, b, c és d közül mind a négy egyenlő 1-gyel.

Ekkor $abcd - 1 = 0$, tehát $a + b + c + d = 0$ kellene, hogy legyen, de ez nem teljesül.

2. eset: a, b, c és d közül három egyenlő 1-gyel. Ekkor a megoldás elején tett feltevésünk miatt $a = b = c = 1$. Ezt behelyettesítve ezt kapjuk: $d - 1 \mid d + 3$. Ekkor $d - 1 \mid d + 3 - (d - 1) = 4$ is fennáll.

Mivel d pozitív egész, ezért a következő lehetőségek vannak: $d - 1 = 1$, azaz $d = 2$, és ez megoldás is; $d - 1 = 2$, azaz $d = 3$, ez is megoldás; végül $d - 1 = 4$, azaz $d = 5$, ami szintén megoldás. Mivel a 4-nek csak ez a három pozitív egész osztója van, ezért itt nem lesz több megoldás.

Ezentúl használni fogjuk a következő összefüggést: ha $abcd - 1 \mid a + b + c + d$, akkor $abcd - 1 \leq a + b + c + d$ (ez pozitív egészek esetén teljesül); illetve $a + b + c + d \leq 4d$.

3. eset: a, b, c és d közül kettő egyenlő 1-gyel: $a = b = 1$. Ekkor $cd - 1 \mid c + d + 2$. Ezt az esetet tovább bontjuk c értéke szerint.

Ha $c = 2$, akkor felírhatjuk ezt az összefüggést:

$$\begin{aligned} 2d - 1 &\leq d + 4, \\ d &\leq 5. \end{aligned}$$

Itt a $d = 2, 3, 4, 5$ eseteket megvizsgálva azt kapjuk, hogy a $d = 2$ és a $d = 5$ ad megoldást.

Ha $c = 3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 3d - 1 &\leq d + 5, \\ d &\leq 3. \end{aligned}$$

Mivel $c \leq d$, ezért itt csak a $d = 3$ eset lehetséges, ami megoldást is ad.

Ha pedig $c > 3$, akkor ezt írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 4d - 1 &\leq cd - 1 \leq c + d + 2 \leq 2d + 2, \quad \text{amiből} \\ 2d &\leq 3. \end{aligned}$$

Mivel $d > 3$, ezért ez nem lehetséges.

Tehát itt megtaláltuk az összes megoldást.

4. eset: a, b, c és d közül egy egyenlő 1-gyel: $a = 1$. Ekkor $bcd - 1 \mid b + c + d + 1$. Mivel $2 \leq b \leq c \leq d$, felírhatjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot d - 1 &= 4d - 1 \leq bcd - 1 \leq a + b + c + d = b + c + d + 1 \leq 3d + 1, \quad \text{amiből} \\ 4d - 1 &\leq 3d + 1, \\ d &\leq 2. \end{aligned}$$

Mivel $d > 1$, ezért itt csak a $d = 2$ eset lehetséges, ami ad is egy megoldást $b = c = 2$ esetén.

5. eset: a, b, c és d közül egyik sem 1. Mivel $2 \leq a \leq b \leq c \leq d$, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot d - 1 &= 8d - 1 \leq abcd - 1 \leq a + b + c + d \leq 4d, \quad \text{amiből} \\ 8d - 1 &\leq 4d, \\ 4d &\leq 1. \end{aligned}$$

Ennek pedig $2 \leq d$ esetén nem lesz megoldása, tehát itt nincs megoldás.

Összefoglalva, a következő megoldásokat kaptuk: $a = 1, b = 1, c = 1, d = 2$; $a = 1, b = 1, c = 1, d = 3$; $a = 1, b = 1, c = 1, d = 5$; $a = 1, b = 1, c = 2, d = 2$; $a = 1, b = 1, c = 2, d = 5$; $a = 1, b = 1, c = 3, d = 3$; $a = 1, b = 2, c = 2, d = 2$.

Kálóczi Kristóf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Egy másik, többek által használt gondolatmenet: feltesszük, hogy $a \leq b \leq c \leq d$, amiből $abcd - 1 \leq a + b + c + d \leq 4d$. Ebből $abcd \leq 4d + 1 \leq 5d$, azaz $abc \leq 5$ adódik. Innen (szintén esetszétválasztással) megkaphatóak a megoldások.

2. Több beküldőnél előfordult a következő hiba: az oszthatóság definíciója alapján felírták, hogy $(abcd - 1)k = a + b + c + d$, amiből $abcdk = a + b + c + d + k$, továbbá a szimmetria miatt feltették, hogy $k \geq d \geq c \geq b \geq a$, amiből az $abcdk \leq 5k$ összefüggést kapták. Végül k -val osztva az $abcd \leq 5$ egyenlőtlenséghez jutottak. Ezt vizsgálva azonban nem az összes megoldást kapjuk meg. A hiba ott van a gondolatmenetben, hogy $k \geq d$ nem feltétlenül teljesül.

3. Honlapunkon egy harmadik megoldás olvasható.