

A feladatot az (ideális egyenessel kibővített) projektív síkon, a Desargues-tétel többszöri alkalmazásával fogjuk igazolni. Ehhez néhány definíciót, és magát Desargues tételét mondjuk ki először.

**1. definíció.** Az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek egy  $e$  egyenesre nézve (*tengelyesen*) *perspektívek*, ha az  $AB$  és  $A'B'$ , az  $AC$  és  $A'C'$ , illetve a  $BC$  és  $B'C'$  egyenespárok  $P, Q, R$  metszéspontjai mind rajta vannak az  $e$  egyenesen.

*Megjegyzés.* Az ideális egyenessel kibővített projektív síkon két háromszöget akkor is tengelyesen perspektívnek tartunk a definíció alapján, ha megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak (ekkor azok metszéspontjai mind rajta vannak az ideális egyenesen).

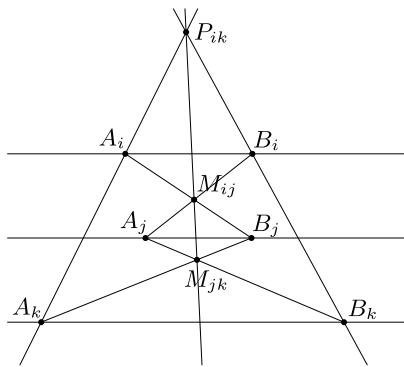
**2. definíció.** Az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek egy  $S$  pontra nézve (*centrálisan*) *perspektívek*, ha az  $AA'$ , a  $BB'$ , és a  $CC'$  egyenesek mind átmennek az  $S$  ponton.

**Desargues tétele.** Ha az  $ABC$  és az  $A'B'C'$  háromszögek pontra nézve perspektívek, akkor egyenesre nézve is azok, és fordítva is igaz: ha a háromszögek egyenesre nézve perspektívek, akkor pontra nézve is azok.

Ezután térjünk rá a feladat bizonyítására.

Tetszőleges  $1 \leq i \neq j \leq 4$  esetén jelölje  $P_{ij}$  az  $A_iA_j$  és  $B_iB_j$  egyenesek metszéspontját (mivel a megadott szakaszok különböző hosszúságúak, ezért a  $P_{ij}$  pontok nem ideális pontok). Legyen továbbá az egymással párhuzamos  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$  egyenesek közös (ideális) pontja  $D_\infty$ .

Tekintsük az  $A_iB_jA_k$  és a  $B_iA_jB_k$  (ahol  $i, j, k$  tetszőleges különböző  $1 \leq i, j, k \leq 4$  indexek) háromszögeket. Mivel a két háromszög a  $D_\infty$  pontra nézve perspektív, így Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektív, azaz az  $A_iB_j$ ,  $A_jB_i$ , az  $A_jB_k$ ,  $A_kB_j$ , illetve az  $A_iA_k$ ,  $B_iB_k$  egyenespárok  $M_{ij}$ ,  $M_{jk}$   $P_{ik}$  metszéspontjai egy egyenesre esnek (lásd az ábrát).



Az  $i, j, k$  indexek megfelelő választásával adódik a következő hat darab ponthármasra, hogy az adott ponthármasok mind egy egyenesre esnek: (1)  $M_{13}, M_{23}, P_{12}$ ; (2)  $M_{12}, M_{23}, P_{13}$ ; (3)  $M_{12}, M_{13}, P_{23}$ ; (4)  $M_{14}, M_{24}, P_{12}$ ; (5)  $M_{14}, M_{34}, P_{13}$ , illetve (6)  $M_{24}, M_{34}, P_{23}$  mind (külön-külön) egy egyenesre esik.

Továbbá mivel az  $A_1A_2A_3$  és  $B_1B_2B_3$  háromszögek a  $D_\infty$  pontra nézve perspektívek, Desargues tétele alapján tengelyesen is perspektívek, azaz az  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ , az  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$ , illetve az  $A_2A_3$ ,  $B_2B_3$  egyenespárok  $P_{12}, P_{13}, P_{23}$  metszéspontjai is (akár az imént) egy egyenesre esnek.

Utoljára tekintsük az  $M_{12}M_{13}M_{23}$  és  $M_{34}M_{24}M_{14}$  háromszögeket.

A fentiek szerint

$$(1 + 4 \Rightarrow) M_{13}M_{23} \cap M_{14}M_{24} = P_{12}, \quad \text{illetve}$$

$$(2 + 5 \Rightarrow) M_{12}M_{23} \cap M_{14}M_{34} = P_{13} \quad \text{és} \quad (3 + 6 \Rightarrow) M_{12}M_{13} \cap M_{24}M_{34} = P_{23},$$

azaz a két háromszög a  $P_{12}P_{13}P_{23}$  egyenesre perspektív, de akkor Desargues tétele alapján az  $M_{12}M_{13}M_{23}$  és  $M_{34}M_{24}M_{14}$  háromszögek pontra nézve is perspektívek, azaz az  $M_{12}M_{34}$ ,  $M_{13}M_{24}$  és  $M_{14}M_{23}$  egyenesek valóban egy ponton mennek át.

*Megjegyzés (diskusszió).* Előfordulhat az  $A_i, B_i$  pontok megfelelő választása esetén, hogy az az  $S$  pont, amire nézve az  $M_{12}M_{13}M_{23}$  és  $M_{34}M_{24}M_{14}$  háromszögek perspektívek az ideális egyenes egy pontja. Ekkor – mivel projektív síkon dolgoztunk – természetesen az  $M_{12}M_{34}$ ,  $M_{13}M_{24}$  és  $M_{14}M_{23}$  egyenesek párhuzamosak lesznek.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12. évf.) és  
Molnár-Sáska Zoltán (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)  
dolgozata alapján