

Jelölje B_1 azoknak a törpöknek a halmazát, akik a legelső napon (a járvány kitörésekor) betegek. Legyen továbbá B_2 azoknak a halmaza, akiket a B_1 -beli törpök (az 1. napon) megfertőznek; nyilván a B_2 és a B_1 halmazok diszjunktak. Jelölje ezután B_3 azon törpök halmazát, akik a 3. napra megbetegednek; ez csak úgy történhet, hogy a 2. napon megfertőződtek B_2 -beli barátaiktól (hiszen akkor csak azok voltak betegek). Értelemszerűen a B_3 és a B_2 halmazok diszjunktak; megmutatjuk, hogy ráadásul B_3 a B_1 -től is diszjunkt. Ez abból következik, hogy a 2. napon minden B_1 -beli törp immunis volt, így akkor nem fertőződhetett meg – tehát nem tartozhat B_3 -ba.

Hasonlóan definiáljuk a $B_4, B_5, \dots$ halmazokat: minden j -re legyen B_j azoknak a törpöknek a halmaza, akik a j -edik napon betegek. Nyilván a B_j -beliek a B_{j-1} -hez tartozó barátaiktól kapták a fertőzést a $(j-1)$ -edik napon. Megmutatjuk, hogy a $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_j$ halmazok páronként diszjunktak. A $j = 1, 2, 3$ értékekre ez világos; tegyük fel, hogy igaz minden $j < n$ -re. Vizsgáljuk ezután B_n státuszát. A B_n -nek és a B_{n-1} -nek nincs közös eleme, hiszen az $(n-1)$ -edik napon beteg B_{n-1} -beli törpök az n -edik napon éppen egészségesek (sőt, immunisak), ezért egyikük sem tartozhat B_n -be. Mivel az $(n-1)$ -edik napon B_{n-2} elemei immunisak, azért egyikük sem betegedik meg aznap, vagyis az n -edik napon valamennyien egészségesek; tehát B_n és B_{n-2} is diszjunktak.

A B_n -nek a $B_1, B_2, \dots, B_{n-3}$ halmazokhoz való viszonyát tisztázandó tegyük fel indirekten, hogy valamelyikükhöz nem diszjunkt; legyen $1 \leq k \leq n-3$ olyan érték, amelyre B_n -nek és B_k -nak létezik egy közös T eleme. Jelölje S az egyik olyan elemét B_{n-1} -nek, akitől az $(n-1)$ -edik napon T megfertőződött. Az indukciós feltevés szerint S sem B_k -nak, sem pedig B_{k-1} -nek nem eleme, azaz a k -edik napon nem beteg és nem is immunis. Így azonban S -et a k -edik napon megfertőzi beteg barátja T , ezért a $(k+1)$ -edik napon S beteg lesz, vagyis $S \in B_{k+1}$. Ebből következik, hogy B_{n-1} és B_{k+1} nem diszjunktak, ami $k+1 < n-1 < n$ és az indukciós feltevés szerint lehetetlen. Ezzel állításunk n -re is teljesül, tehát j minden értékére igaz.

Ha E -vel jelöljük azoknak a törpöknek a halmazát, akik sosem kapják el a betegséget, akkor az $E, B_1, B_2, \dots$ – páronként diszjunkt – halmazok egyesítése a 100 lakosból álló teljes Törpfalva. Ha a $B_1, B_2, \dots, B_{100}$ halmazok egyike sem üres, akkor B_{101} már szükségképpen az; ha pedig valamelyikük üres, akkor az utána következő többi is. A 101-edik napon tehát semmiképpen nincs beteg, a járvány véget ér.