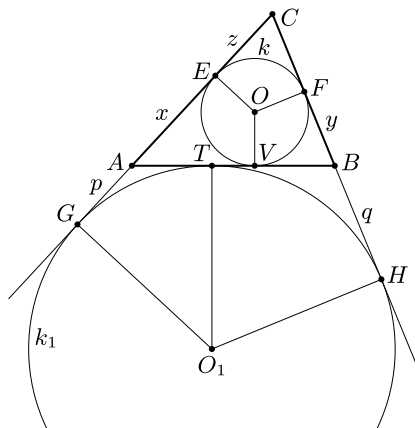


Először lássunk be egy segédtelet. Használjuk az 1. ábra jelöléseit.



1. ábra

Tétel. A háromszög beírt és hozzáírt körének egy oldalra eső érintési pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, tehát $AT = VB$.

Bizonyítás. Legyen a háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölések szerint a, b, c , a beírt kör érintőszakaszainak hossza x, y, z , a hozzáírt kör érintőszakaszainak hossza p és q , a háromszög kerülete k , és $s = \frac{k}{2}$.

$CG = CH$, mivel a k_1 körhöz C pontból húzott érintőszakaszok.

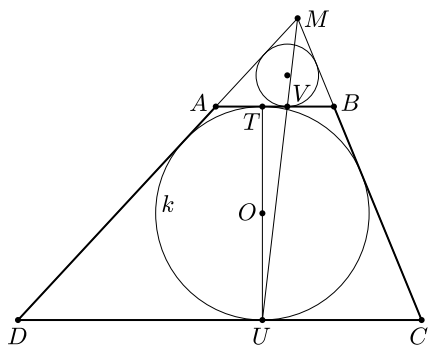
$CG + CH = CA + AT + TB + BC = k = 2s$, ezért $CG = CH = s$, amiből $AT = p = s - b$.

$2x + 2y + 2z = k$, vagyis $x + y + z = s$.

$BV = y = s - (x + z) = s - b$, tehát $AT = BV$.

Két esetre bontjuk a feladat bizonyítását.

1. eset: $AB < CD$. Használjuk a 2. ábra jelöléseit. Legyen k a beírt kör.



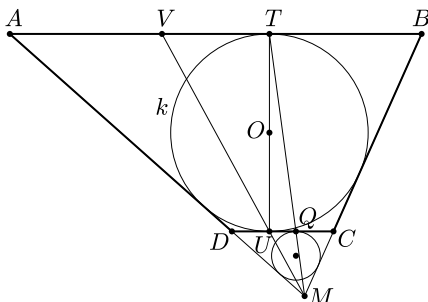
2. ábra

Ebben az esetben az M metszéspont az AB egyenes C és D pontokat nem tartalmazó oldalára esik. A k kör az MAB háromszög AB oldalához írt köre.

Nagyítsuk az ABM háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MD}{MA}$ arányban. Ekkor az MAB háromszög beírt köre k -ba megy át. Az AB egyenes képe a CD egyenes, hiszen $AB \parallel CD$ és AB érinti a beírt kört, CD pedig érinti k -t. A V pont képe U lesz, hiszen a pont és a képe, valamint M egy egyenesen vannak, és V rajta van az AB egyenesen, így a képe rajta van a CD egyenesen. Tehát az AB egyenest az MAB háromszög beírt köre a V pontban érinti.

Használjuk a segédteletünket. A beírt kör érintési pontjának távolsága az egyik csúctól egyenlő a hozzáírt kör távolságával a másik csúctól, vagyis $AT = VB$.

2. eset: $AB > CD$. Használjuk a 3. ábra jelöléseit.



3. ábra

Most M a CD egyenes A és B pontot nem tartalmazó oldalán lesz. Ekkor k az MCD háromszög hozzáírt köre.

Nagyítsuk az MCD háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MA}{MD}$ arányban. Ekkor MCD beírt köre k -ba megy át. A CD egyenes képe az AB egyenes lesz. Mivel CD érinti a beírt kört, AB pedig érinti k -t, az U pont képe V , a Q pont képe pedig T lesz.

Pontosan akkor igaz, hogy $AT = VB$, ha $DQ = CU$. Utóbbi a segédtételünk értelmében igaz, így $AT = VB$ is teljesül.

Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ paralellogramma, azaz nem létezik az M pont.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Döbrönte Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12 évf.)
dolgozata alapján