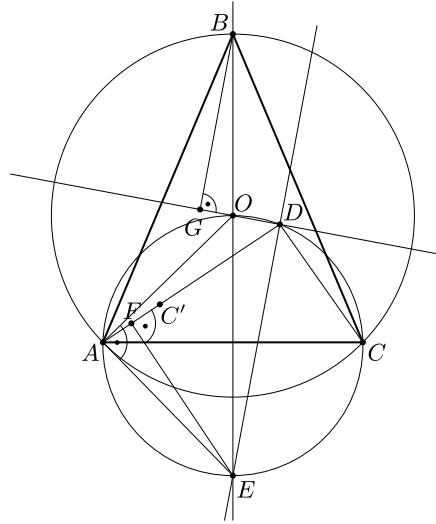


Legyen O az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja, és használjuk az *ábra* jelöléseit. A kerületi- és középponti szögek tétele miatt $\angle ADC = 2\angle ABC = \angle AOC$, ezért az A, C, D és O pontok egy körre illeszkednek. Az $AD = DC$ esetben $D = O$, az állítás triviális, ezért a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $AD > DC$.



Az $\angle ADC$ szögfelezője az ADC kört az O -val átellenes E pontban metszi, ami felezi az AC ívet. A C pont DE -re vonatkozó C' tükörképe illeszkedik AD -re. Így $AE = CE = C'E$, s ezért az AC' szakasz F felezőpontjára $\angle EFC' = 90^\circ$ teljesül. Innen egyrészt a felezés miatt

$$DF = \frac{DC' + DA}{2} = \frac{DC + DA}{2},$$

másrészt definíció szerint $DF = DE \cdot \cos(\angle FDE)$.

Mivel OE átmérő, a Thalész-tétel miatt $\angle ODE = \angle OAE = 90^\circ$. A külső és a belső szögfelezők merőlegesek egymásra, így OD éppen a D -nél lévő külső szögfelező. Legyen G a B merőleges vetülete OD -n. A szimmetria miatt B, O és E kollineárisak, így az $ODE\triangle$ és a $OGB\triangle$ szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlóak. Ezt kihasználva

$$\begin{aligned} BG &= \frac{BO}{OE} \cdot DE = \frac{AO}{OE} \cdot DE = \cos(\angle AOE) \cdot DE = \cos(\angle FDE) \cdot DE = \\ &= \frac{DC + DA}{2}, \end{aligned}$$

amivel az állítást beláttuk.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)