

Írjuk fel az $\frac{x}{y}$ pozitív racionális számot egymáshoz relatív prím a és b pozitív egész számok hányadosaként: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Az egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$x - y - 2017 = \frac{x}{y} + \frac{x^3}{y^3} - \frac{x^4}{y^4}$$

egész szám, vagyis

$$\frac{x}{y} + \frac{x^3}{y^3} - \frac{x^4}{y^4} = \frac{a}{b} + \frac{a^3}{b^3} - \frac{a^4}{b^4} = \frac{ab^3 + a^3b - a^4}{b^4}$$

szintén egész szám. A számláló tehát osztható b^4 -nel, így b -vel is. A számláló első két tagja b -nek többszöröse, tehát a^4 -nek is oszthatónak kell lennie b -vel. Az a és b relatív prímek, emiatt innen már csak $b = 1$ lehetséges. Ezzel beláttuk, hogy az $\frac{a}{b}$ tört egész szám. Legyen most $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = z$ pozitív egész. Ekkor $x = yz$, ahol x, y, z mind pozitív egészek. Ezzel a jelöléssel az eredeti egyenlet könnyebben kezelhető formában írható:

$$yz - y - z - z^3 + z^4 = 2017.$$

Innen a megoldás befejezésére két lehetőséget is megmutatunk.

I.) Adjunk mindkét oldalhoz egyet, majd alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} yz - y - z + 1 - z^3 + z^4 &= 2018, \\ (y - 1)(z - 1) + z^3(z - 1) &= 2018, \\ (z - 1)(y - 1 + z^3) &= 2018. \end{aligned}$$

Az 1009 prímszám, a 2018 tehát csak kétféleképpen bomlik pozitív egészek szorzatára: $2018 = 1 \cdot 2018 = 2 \cdot 1009$. A bal oldalon mindkét tényező pozitív kell legyen, hiszen $z^3 + y - 1 \geq 1 + 1 - 1 = 1$. Továbbá az is biztos, hogy

$$z^3 + y - 1 \geq z + y - 1 > z - 1,$$

így csak $z^3 + y - 1 = 1009$ és $z - 1 = 2$, illetve $z^3 + y - 1 = 2018$ és $z - 1 = 1$ lehetséges.

Az elsőből $z = 3$, $y = 1009 + 1 - 27 = 983$, $x = 2949$, a másodikból pedig $z = 2$, $y = 2018 + 1 - 8 = 2011$, $x = 4022$ adódik. Ellenőrzéssel látható, hogy mindkét gyökpár kielégíti az egyenletet.

II.) Először megmutatjuk, hogy $z \geq 7$ esetén nincs megoldása az egyenletnek. Ha $z \geq 7$, akkor

$$\begin{aligned} yz - y - z - z^3 + z^4 &\geq 7y - y - z - z^3 + z^4 > z^4 - z^3 - z = z(z^3 - z^2 - 1) \geq \\ &\geq 7(z^3 - z^2 - 1) = 7z^2(z - 1) - 7 \geq 7 \cdot 49 \cdot 6 - 7 = 2051. \end{aligned}$$

Az is azonnal adódik, hogy $z = 1$ esetén $yz - y - z - z^3 + z^4 = -1$, így elegendő a továbbiakban $z = 2, 3, 4, 5, 6$ vizsgálata. Az egyenletből kifejezzük y -t és sorra megvizsgáljuk, hogy melyik z esetén kapunk egész értéket y -ra:

$$y = \frac{2017 - z^4 + z^3 + z}{z - 1}.$$

A $z = 6$ esetén a tört $\frac{943}{5}$, a $z = 5$ -re a tört $\frac{1522}{4}$, végül $z = 4$ -re a tört $\frac{1829}{3}$, egyik sem egész. Marad a $z = 3$, ahol $y = 983$, továbbá $z = 2$, ahol pedig $y = 2011$. Az elsőre $x = 2949$, a másodikra $x = 4022$.