

Nyilván

$$\begin{aligned} S_{100} &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{99} a_{100} = \\ &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{98} a_{99} + a_{100}(a_1 + a_2 + \dots + a_{99}), \end{aligned}$$

és ebből Yvett a 100. lépésben már csak az $a_{100}(a_1 + a_2 + \dots + a_{99})$ részt tudja befolyásolni, ezért hogy $S_{100} = 0$ legyen,

$$a_{100} = -\frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{98} a_{99}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{99}}$$

kimondása lehet részéről az észszerű lépés.

Ha $a_1 + a_2 + \dots + a_{99} \neq 0$, akkor ezt meg is teheti; ezért aztán Xavérnak csak az lehet a célja, hogy ezt megakadályozza azzal, hogy a 99. lépésben az $a_{99} = -(a_1 + a_2 + \dots + a_{98})$ számot mondja. De Yvett még ekkor is nyerhet, ha eléri, hogy ebben az esetben

$$S_{99} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{98} a_{99} = 0$$

legyen, vagyis

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98} + a_{99}(a_1 + a_2 + \dots + a_{98}) &= 0, \\ a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98} + a_{99}(-a_{99}) &= 0, \\ a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{98})^2 &= 0, \\ -(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{98}^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98}) &= 0. \end{aligned}$$

Itt válik el egymástól az $a)$ és $b)$ rész.

$a)$ Valós számok esetén

$$\begin{aligned} 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{98}^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98}) &= \\ = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{98}^2) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{98})^2 & \end{aligned}$$

(nemnegatív, és) csak $a_1 = a_2 = \dots = a_{98} = 0$ esetén nulla.

Ekkor Yvett nem érheti el a célját, ha Xavér már valahol az elején mondott egy nemnulla számot, amit bőven megtehetett – ezért Xavérnak van nyerő stratégiája.

$b)$ Komplex számok esetén viszont

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{98}^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98} = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{98}^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{97} a_{98}) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \dots + a_{97}) + \\ + 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{97}^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{96} a_{97}) &= 0, \\ 2a_{98}^2 + 2a_{98}(a_1 + a_2 + \dots + a_{97}) + \\ + ((a_1 + a_2 + \dots + a_{97})^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{97}^2) &= 0 \end{aligned}$$

másodfokú egyenlet a_{98} -ra, aminek komplex gyökei

$$\begin{aligned} a_{98_{1,2}} &= \\ = \frac{-(a_1 + a_2 + \dots + a_{97}) \pm \sqrt{-(a_1 + a_2 + \dots + a_{97})^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{97}^2)}}{2}. \end{aligned}$$

Ha e gyökök bármelyikét mondja Yvett a 98. lépésben, akkor ő fog nyerni, ezért ekkor Yvettnek van nyerő stratégiája.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)