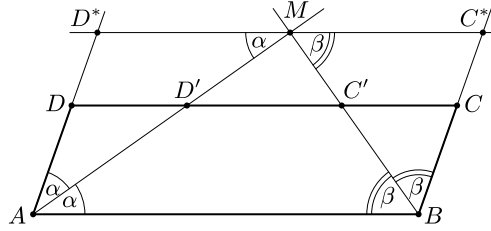


Húzzunk párhuzamost az M ponton keresztül az AB oldallal, ez az egyenes messe a BC és AD egyeneseket rendre a C^* és D^* pontokban. Legyen $MAD^* \sphericalangle = MAB \sphericalangle = \alpha$ és $MBA \sphericalangle = MBC^* \sphericalangle = \beta$. Vegyük észre, hogy $AMD^* = MAB \sphericalangle = \alpha$, hiszen váltószögek, és hasonlóan $BMC^* \sphericalangle = MBA \sphericalangle = \beta$. Így az $AMD^* \triangle$ és az $MBC^* \triangle$ egyenlő szárú, amiből $MD^* = D^*A = C^*B = MC^* = AB/2$ adódik, ahol a második egyenlőségnél kihasználtuk, hogy ABC^*D^* paralelogramma, az utolsó egyenlőségnél pedig, hogy $MD^* + MC^* = D^*C^* = AB$.



Feltehetjük, hogy $T_{ABC^*D^*} = 2$. Mivel az ABC^*D^* paralelogramma és az $ABM \triangle$ AB oldala és ehhez tartozó magassága közös, a jól ismert területképletek alapján $T_{ABM} = 1$. Továbbá a feltétel szerint $AD = \lambda AB = 2\lambda AD^*$, így ismét a paralelogramma ismert területképlete szerint

$$T_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = 2\lambda(AB \cdot AD^* \cdot \sin 2\alpha) = 2\lambda T_{ABC^*D^*} = 4\lambda.$$

Az eddigiekből az is következik, hogy az M pont pontosan akkor van benne az $ABCD$ paralelogrammában, ha $\lambda \geq 1/2$. Ilyenkor a keresett területarány a fentiekből azonnal adódik:

$$\frac{T_{ABM}}{T_{ABCD}} = \frac{1}{4\lambda}.$$

Ha $\lambda < 1/2$, akkor az M pont $ABCD$ -n kívül esik. Messe AM és BM a CD oldalt rendre a D' és C' pontokban. Ekkor a $D^*AM \triangle$ -ben a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{AD'}{AM} = \frac{AD}{AD^*} = 2\lambda.$$

Világos, hogy $MD'C' \triangle \sim MAB \triangle$, hiszen szögeik páronként megegyeznek, és hasonlóságuk aránya $MD'/MA = 1 - DA'/MA = 1 - 2\lambda$. Ebből következik, hogy $T_{MD'C'} = (1 - 2\lambda)^2 T_{MAB} = (1 - 2\lambda)^2$. Végül az $ABM \triangle$ által lefedett területre

$$T_{ABC'D'} = T_{ABM} - T_{MC'D'} = 1 - (1 - 2\lambda)^2 = 4\lambda - 4\lambda^2.$$

Innen pedig

$$\frac{T_{ABC'D'}}{T_{ABCD}} = \frac{4\lambda - 4\lambda^2}{4\lambda} = 1 - \lambda.$$

Tehát a keresett arány $1/4\lambda$, ha $\lambda \geq 1/2$; és $1 - \lambda$, ha $\lambda < 1/2$.