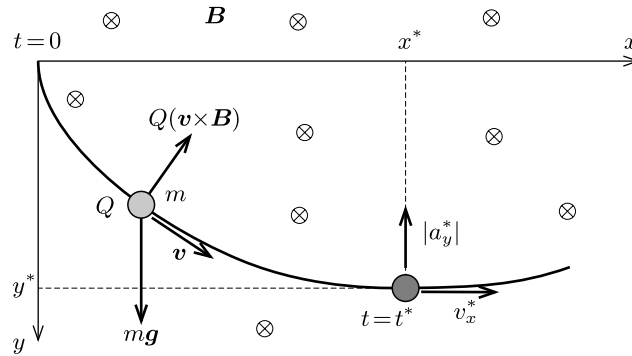


I. megoldás. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat. A mágneses indukció ugyancsak vízszintes irányú és az *ábrán* látható módon a papír síkjába befelé irányul. A kicsiny töltött test a koordináta-rendszer origójából indul, és a pályája – vázlatosan – az ábrán látható görbe. (A mozgás nyilván az $x - y$ síkban történik, így elegendő ezt vizsgálnunk.)



A „földi laboratórium” kifejezés arra utal, hogy a testre ható erők között a mágneses Lorentz-erő mellett a nehézségi erőt is figyelembe kell vennünk. A testre ható erő komponensei:

$$\begin{aligned} (1) \quad & F_x = Qv_y B, \\ (2) \quad & F_y = mg - Qv_x B, \end{aligned}$$

ahol

$$(3) \quad v_x = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \quad \text{és} \quad v_y = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

a test sebességének megfelelő derékszögű összetevői.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$F_x = ma_x \quad \text{és} \quad F_y = ma_y,$$

ahol

$$(4) \quad a_x = \frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} \quad \text{és} \quad a_y = \frac{\Delta v_y(t)}{\Delta t}.$$

Behelyettesítve az erőkomponenseket a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$(5) \quad a_x = \omega_0 v_y,$$

és

$$(6) \quad a_y = g - \omega_0 v_x,$$

ahol

$$(7) \quad \omega_0 = \frac{QB}{m}$$

egy körfrekvencia dimenziójú állandó.

Megjegyzés. Ezt a mennyiséget „ciklotronfrekvenciának” nevezik, mert ilyen körfrekvenciával mozog a ciklotronokban egy Q/m fajlagos töltésű részecske a B indukciójú homogén mágneses mezőben.

Felírhatjuk még a munkatételt a töltött részecske mozgására az indulás pillanata és egy tetszőleges későbbi pillanat között. Mivel a Lorentz-erő merőleges a sebességre, tehát nem végez munkát, elegendő a nehézségi erő munkavégzésével számolnunk:

$$(8) \quad \frac{1}{2}m(v_x(t)^2 + v_y(t)^2) = mgy(t).$$

Innen leolvashatjuk, hogy a test sebessége akkor lesz a legnagyobb, amikor a függőleges elmozdulás (y^*) maximális. Mivel ilyenkor a függőleges irányú sebesség éppen nulla, a vízszintes irányú sebességkomponensre fennáll:

$$(9) \quad v_x^* = \sqrt{2gy^*}.$$

a) és b) Írjuk fel az (5) egyenletet a kicsiny sebesség- és elmozdulás-megváltozásokkal, majd összegezzük ezeket a megváltozásokat a mozgás kezdetétől a pálya legmélyebb pontjáig:

$$\frac{\Delta v_x(t)}{\Delta t} = \omega_0 \frac{\Delta y(t)}{\Delta t},$$

$$\sum \Delta v_x(t) = \omega_0 \sum \Delta y(t),$$

ahonnan

$$(10) \quad v_x^* = \omega_0 y^*$$

adódik. Összevetve ezt az eredményt a munkatételből kapott (9) összefüggéssel, válaszolhatunk az első két alkérdésre. A test legnagyobb sebessége

$$|v| = v_x^* = \frac{2g}{\omega_0} = \frac{2mg}{QB},$$

a legmélyebb süllyedése pedig (az indulási magassághoz viszonyítva):

$$y^* = \frac{2g}{\omega_0^2} = \frac{2gm^2}{Q^2 B^2}.$$

c) A fentiekhez hasonló módon járhatunk el a vízszintes irányú (6) mozgásegyenlettel, ami

$$\Delta v_y(t) = g\Delta t - \omega_0 \Delta x(t)$$

alakban is felírható. Összegezve a mozgás kezdetétől a legmélyebb pontba érkezés t^* időpillanatáig, amikor a vízszintes irányú elmozdulás x^* , a függőleges irányú sebesség pedig nulla:

$$0 = gt^* - \omega_0 x^*,$$

ahonnan a mozgás ezen szakaszára vonatkoztatott átlagsebesség:

$$\bar{v} = \frac{x^*}{t^*} = \frac{g}{\omega_0} = \frac{mg}{QB}.$$

Mivel a vízszintes irányú mozgás a $0 < x(t) < x^*$ intervallumon történő mozgás ismétlődése, az egész mozgás átlagsebessége (x^* -nál sokkal hosszabb úton) ugyancsak $mg/(QB)$.

d) A pálya legmélyebb pontjánál a test gyorsulása (6) szerint:

$$a_y^* = g - \omega_0 v_x^*,$$

ami (7) és a v_x^* -re kapott kifejezés alapján:

$$a_y^* = g - \frac{QB}{m} \frac{2mg}{QB} = g - 2g = -g.$$

A töltött test tehát éppen a nehézségi gyorsulással megegyezően gyorsul függőlegesen *felfelé*.

Illés Gergely (Eger, Szilágyi Erzsébet Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tekintsünk egy olyan koordináta-rendszert, amely az indukcióvonalakra merőlegesen, vízszintes irányban v_0 sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerhez képest. Ha a töltött test pillanatnyi sebessége a „mozgó” rendszerben v , akkor a laboratóriumi rendszerben a sebessége $v + v_0$, így a Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m\mathbf{a} = Q(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B} + m\mathbf{g},$$

amit

$$(11) \quad m\mathbf{a} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + [m\mathbf{g} + Q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}]$$

alakban is felírhatunk. A fenti képletben $\mathbf{a}$ a test gyorsulása, ami a laboratóriumi rendszerben ugyanaz a vektor, mint az egyenletesen mozgó másik koordináta-rendszerben a gyorsulás.

A (11) egyenlet szögletes zárójelében szereplő két vektor ugyanolyan (függőleges) irányú, és ha v_0 nagyságát megfelelően, nevezetesen $v_0 = mg/(QB)$ módon választjuk, a két tag éppen kiejtheti egymást. Ekkor a mozgásegyenlet olyan, mintha a test súlytalan lenne, és csak a mágneses Lorentz-erő hatása alatt mozogna. Úgy is mondhatjuk, hogy a mozgó rendszerben megjelenik egy $E = Bv_0$ nagyságú homogén, függőlegesen felfelé irányuló elektromos mező, aminek hatása kiegyenlíti az mg nagyságú, függőlegesen lefelé mutató nehézségi erőt.

Jól ismert, hogy homogén mágneses mezőben a mágneses erővonalakra merőleges kezdősebességgel rendelkező részecske pályája kör, és a részecske a kör mentén $\omega_0 = QB/m$ körfrekvenciával egyenletesen mozog. Jelen esetben is ez valósul meg, hiszen a test kezdősebessége a laboratóriumi rendszerben nulla, a mozgó rendszerben tehát v_0 nagyságú. A körpálya sugara

$$R = \frac{v_0}{\omega_0} = \left(\frac{m}{QB} \right)^2 g$$

lesz. A mozgás – a laboratóriumi rendszerből nézve – egy v_0 sebességű egyenletes mozgás és egy v_0 kerületi sebességű körmozgás szuperpozíciója. A pálya alakja ezek szerint *ciklois*.

a) A test sebessége a pálya legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb, ugyanis itt lesz egymással párhuzamos és egyirányú a kétféle mozgáshoz tartozó sebességvektor:

$$v_{\max} = 2v_0 = 2 \frac{mg}{QB}.$$

b) A test legnagyobb lesüllyedése a kezdőponthoz képest

$$\Delta h = 2R = 2 \left(\frac{m}{QB} \right)^2 g.$$

c) A test sebessége a vízszintes irányú, állandó v_0 nagyságú sebességnek és a körmozgásból adódó, a nulla körül ingadozó sebességnek a vektori összege. Az eredő (hosszú időtartamra vonatkoztatott) átlagsebesség tehát v_0 nagyságú, vízszintes és a mágneses erővonalakra is merőleges irányú vektor lesz.

d) A test gyorsulása csak a körmozgásból adódik, nagysága a pálya minden pontjában

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \left(\frac{mg}{QB} \right)^2 \cdot \left(\frac{QB}{m} \right)^2 \frac{1}{g} = g$$

nagyságú. A gyorsulás iránya a mozgás kezdetekor függőlegesen lefelé, a pálya legmélyebb pontjában pedig függőlegesen felfelé mutat.

Tófalusi Ádám (Debreceni Fazekas M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, és induljunk ki a vízszintes és a függőleges irányokra vonatkozó (5) és (6) mozgásegyenletből. Az (5) egyenlet, amit $a_x - \omega_0 v_y = 0$ alakban is felírhatunk, azt fejezi ki, hogy a $v_x(t) - \omega_0 y(t)$ mennyiség változási üteme (deriváltja) nulla, tehát ez a kifejezés *időben állandó*. Az állandó (mivel a kezdőpillanatban v_x is és y is nulla) nulla kell hogy legyen, vagyis

$$(12) \quad v_x(t) = \omega_0 y(t).$$

Helyettesítsük be v_x -et a függőleges irányú mozgásra vonatkozó (6) egyenletbe:

$$a_y(t) = g - \omega_0^2 y(t),$$

amit

$$(13) \quad a_y(t) = -\omega_0^2 (y(t) - y_0)$$

alakban is felírhatunk, ahol $y_0 = g/\omega_0^2$.

Felismerhetjük, hogy (13) egy olyan rugóra akasztott súlyos test mozgásegyenlete, amely test saját súlya alatt a rugó megnyúlása y_0 , és a rezgés körfrekvenciája ω_0 . A harmonikus rezgőmozgás ismert képleteiből (az $y(0) = 0$ és $v_y(0) = 0$ kezdőfeltételeket is figyelembe véve) könnyen megkaphatjuk, hogy

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{g}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ v_y(t) &= \frac{g}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ a_y(t) &= g \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Ezekből (12) segítségével rögtön adódik, hogy

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t),$$

ennek változási üteme pedig

$$a_x(t) = g \sin \omega_0 t.$$

Az $x(t)$ -t úgy kapjuk meg, hogy olyan függvényt keresünk, aminek változási üteme $v_x(t)$, és a kezdőpillanatban nulla értékű:

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2}(\omega_0 t - \sin \omega_0 t).$$

A fenti képletekből a feladat valamennyi kérdésére könnyen megkapjuk a választ: a test legnagyobb sebessége $2g/\omega_0$, legnagyobb lesüllyedése $2g/\omega_0^2$, a mozgás átlagsebessége g/ω_0 , és a gyorsulása a pálya legalsó pontjában (és minden más helyes is) g .

Megjegyzés. Mindhárom megoldásban a newtoni mechanika nemrelativisztikus mozgásegyenletéből indultunk ki. Ez csak akkor jogos, ha $v_{\max} \ll c$, vagyis $mg \ll QBc$. Ez sokkal erősebb megszorítás, mint a feladat szövegében szereplő $mg < QBc$.

(G. P.)