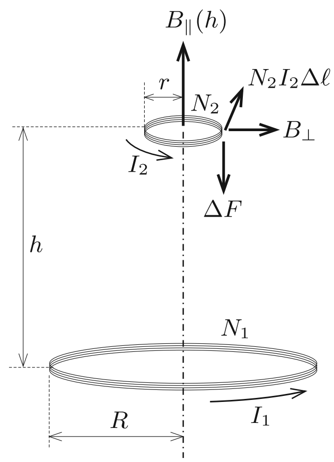
A két tekercs között ható erő vonzó hatású, ha a két áram (I_1 és I_2) körüljárási iránya megegyezik, ellenkező esetben pedig ugyanakkora nagyságú, de taszító. A továbbiakban három különböző megoldást mutatunk a feladatra.

I. megoldás. Az elrendezés forgásszimmetriája miatt a két tekercs között ható eredő erő a szimmetriatengellyel párhuzamos, így elegendő csak az ilyen irányú erőket összegeznünk.

A nagy tekercs által a kis tekercs helyén létrehozott mágneses térnek tengelyirányú $B_\parallel$ komponense, illetve radiálisan kifelé mutató $B_\perp$ komponense van (*1. ábra*). Vegyük észre, hogy a $\Delta \boldsymbol{F} = I \cdot \Delta \ell \times \boldsymbol{B}$ képlet szerint tengelyirányú erőt csak $B_\perp$ okoz, azaz feladatunk ennek a komponensnek a meghatározása.



1. ábra

Ismeretes, de a Biot–Savart-törvény segítségével könnyen le is vezethető (ettől itt most eltekintünk), hogy a nagy tekercs által a tengely mentén, a tekercs középpontjától h távolságban keltett mágneses indukció nagysága

$$B_\parallel(h) = \frac{\mu_0}{2} I_1 N_1 R^2 \big(h^2 + R^2\big)^{-3/2}.$$

Vegyünk fel egy igen kicsiny Δh magasságú, r sugarú hengerfelületet (koaxiálisan) a kis tekercs köré (*2. ábra*). Tekintettel arra, hogy $r \ll R$ és $\Delta h \ll h$, a mágneses indukció nagysága a henger alap- és fedőlapján, illetve az oldalpalást mentén állandónak vehető. A henger felső lapján a mágneses indukció nagysága egy kicsiny ΔB-vel különbözik az alaplap menti indukciótól:

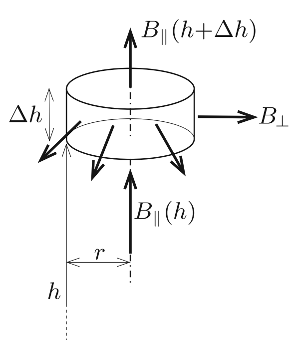
$$B_\parallel(h + \Delta h) = B_\parallel(h) + \Delta B_\parallel,$$

emiatt a körlapokon be- és kilépő mágneses fluxus nem egyezik meg. A teljes (zárt) hengerfelületen kilépő összes mágneses fluxus viszont (a mágneses tér forrásmentessége miatt) nulla:

$$B_\parallel(h + \Delta h)\, r^2 \pi - B_\parallel(h)\, r^2 \pi + 2 r \pi \Delta h\, B_\perp = 0,$$

ahonnan megkapható a számunkra érdekes (sugárirányú) komponens:

$$B_\perp = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx \frac{3}{4} \mu_0 I_1 N_1 R^2 r h \big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}.$$



2. ábra

Megjegyzés. Az utolsó lépés jogosságát a kicsiny mennyiségek hányadosának differenciálhányadossal történő közelítésével láthatjuk be:

$$\frac{\Delta B_\parallel}{\Delta h} \approx B'_\parallel(h),$$

de a Newton-féle $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ (ha $\varepsilon \ll 1$) közelítő képlet is eredményre vezet:

$$\left[(h+\Delta h)^2+R^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx \left(h^2+2h\Delta h+R^2\right)^{-3/2} \approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right)^{-3/2} \approx$$
$$\approx \left(h^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{2h\Delta h}{h^2+R^2}\right) = \left(h^2+R^2\right)^{-3/2} - 3h\Delta h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}.$$

A kis tekercsre ható eredő erő (kihasználva, hogy a tekercs minden pontjában $\Delta\ell$ merőleges $\boldsymbol{B}_\perp$-re):

$$F = \sum \Delta F = I_2N_2B_\perp \sum \Delta\ell = \frac{3}{2}\mu_0 I_1I_2N_1N_2R^2r^2h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}\pi.$$

II. megoldás. Mivel a két tekercs egyforma nagyságú erőt fejt ki egymásra, a feladat megoldáshoz számolhatjuk a kis tekercs által a nagy tekercsre kifejtett erőt is.

Minthogy $r \ll R$, a kis tekercs mágneses tere közelíthető egy

$$m = I_2N_2 \cdot r^2\pi$$

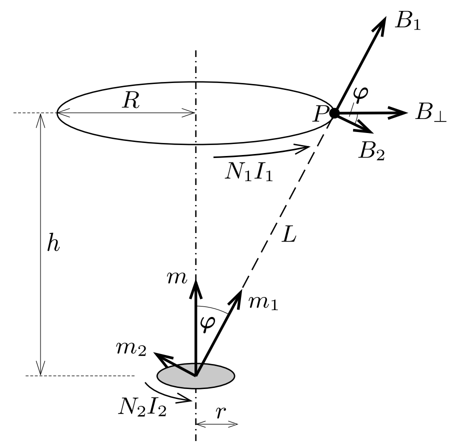
nyomatékú mágneses dipólus terével.

Bontsuk fel az $\boldsymbol{m}$ vektort két komponensre a *3. ábrán* látható módon. Az egyes komponensek által létrehozott mágneses indukcióvektorok nagyságát (B_1, illetve B_2) és irányát könnyen meghatározhatjuk a dipólustól $L=\sqrt{h^2+R^2}$ távol lévő P pontban, hiszen ezek a *Gauss-féle főhelyzeteknek* felelnek meg. B_1 nagysága az I. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére eső pontokra) vonatkozó ismert képlet (lásd az I. megoldást) alapján:

$$B_1 = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi}\,\frac{1}{L^3} = \frac{\mu_1 m\cos\varphi}{2\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2}.$$

B_2 nagysága a II. Gauss-féle főhelyzetre (a dipól tengelyére merőleges síkban elhelyezkedő pontokra) vonatkozó képlet alapján:

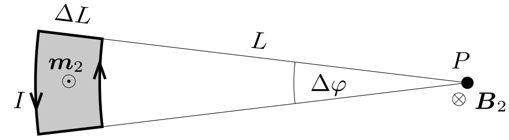
$$B_2 = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3} = \frac{\mu_1 m\sin\varphi}{4\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2}.$$



3. ábra

Megjegyzés. A II. főhelyzetben a mágneses indukció $\boldsymbol{B}_2$ vektora ellentétes irányú az $\boldsymbol{m}_2$ dipólnyomatékkal, az I. főhelyzetben viszont $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{m}_1$ azonos irányú vektorok. B_2 nagysága – ugyanakkora L távolság és ugyanakkora dipólnyomaték esetén – éppen fele B_1-nek. Mindezt pl. a Biot–Savart-törvény alkalmazásával láthatjuk be, ha azt a *4. ábrán* látható kicsiny, áramjárta körvezető, vagyis az $m_2 = IL\Delta\varphi\Delta L$ nyomatékú mágneses dipól P pontbeli terének kiszámítására használjuk. A mágneses indukcióhoz csak a két kis körív árama ad járulékot, és az eredő tér nagysága:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{L\Delta\varphi}{L^2} - \frac{(L+\Delta L)\Delta\varphi}{(L+\Delta L)^2}\right) \approx \frac{\mu_0 I\Delta\varphi}{4\pi}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{(L+\Delta L)}\right) \approx$$
$$\approx \frac{\mu_0 I\Delta\varphi\Delta L}{4\pi L^2} = \frac{\mu_0 m_2}{4\pi}\,\frac{1}{L^3}.$$



4. ábra

A 3. ábra alapján a keresett radiális indukciókomponens nagysága

$$B_\perp = B_1 \sin\varphi + B_2 \cos\varphi = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 m}{\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2} \sin\varphi\,\cos\varphi =$$
$$= \frac{3}{4}\,\frac{\mu_0 m}{\pi}\left(h^2+R^2\right)^{-3/2} \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}\,\frac{r}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{3\mu_0}{4} I_2 N_2 R r^2 h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2},$$

és végül a nagy tekercsre ható erő:

$$F = 2R\pi I_1 N_1 B_\perp = \frac{3}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h\left(h^2+R^2\right)^{-5/2}\pi.$$

III. megoldás. A feladat energetikai megfontolásokkal is megoldható. Legyen a két tekercs önindukciós állandója rendre L_1 és L_2, a kölcsönös indukciós együtthatójuk pedig M. (A kölcsönös indukcióról és a mágneses tér energiájáról lásd még *Gnädig Péter: A kölcsönös indukció* c. cikket a KöMaL 2001. évi 2. számában, illetve *Szász Krisztián: Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása* c. cikket a KöMaL 2011. évi 9. számában és a KöMaL honlapján. – A Szerk.)

A két lapos tekercs kölcsönös indukciós együtthatóját könnyen meghatározhatjuk, ha a nagy tekercs által létrehozott mágneses indukcióvektort a kis tekercs által határolt körlapon állandónak tekintjük. (Ez a feltevés $r \ll R$ miatt jogos.) A kis tekercsen áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi_{1,2} = N_2 r^2 \pi B_\parallel(h) = \frac{\mu_0 \pi}{2} I_1 N_1 N_2 R^2 r^2 \left(h^2+R^2\right)^{-3/2},$$

és így a kölcsönös indukciós együttható:

$$M(h) = \frac{\Phi_{1,2}}{I_1} = \frac{\mu_0\pi}{2} N_1 N_2 R^2 r^2 \left(h^2+R^2\right)^{-3/2}.$$

Látható, hogy a kölcsönös indukciós együttható függ a tekercsek távolságától, míg az önindukciós együtthatók nyilván függetlenek h-tól.

A rendszer mágneses terének energiáját az

$$E = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

kifejezés írja le. Ha a két tekercs közötti távolságot egy kicsiny Δh értékkel megnöveljük, miközben F nagyságú húzóerőt fejtünk ki, akkor $W = F\Delta h > 0$ munkát végzünk. Eközben a rendszer mágneses terének energiája

$$\Delta E = I_1 I_2\, \Delta M(h)$$

értékkel megváltozik. Első gondolatunk az lehet, hogy a munkatétel szerint

$$\Delta E = W, \qquad \text{vagyis} \qquad F = \frac{\Delta E}{\Delta h}.$$

Ez azonban nem lehet igaz, hiszen h növelésekor $E(h)$ csökken, így $\Delta E < 0$ nem egyezhet meg a $W > 0$ munkával.

A hiba forrása a következő: miközben a tekercseket eltávolítjuk egymástól, a bennük folyó áramot csak külső feszültségforrások segítségével tarthatjuk állandó értéken, és ezen feszültségforrások által leadott energiát nem vettük figyelembe az energiamérleg felírásánál. Ha a munkatételt helyesen akarjuk alkalmazni, akkor vagy ki kell számítanunk a külső áramforrások energialeadását, vagy – egy „trükk” alkalmazásával – energetikailag zárttá kell tennünk a rendszert. A továbbiakban a második módszert követjük.

A tekercseket, amelyekben kezdetben I_1 és I_2 áram folyt, oly mértékben lehűthetjük, hogy szupravezetőkké váljanak. Ekkor az áramok fenntartásához nincs szükség külső feszültségforrásra, tehát a tekercsek kivezetéseit akár rövidre is zárhatjuk. A tekercsek között ható erő nyilván csak az áramok nagyságától függ, attól nem, hogy milyen hőmérsékletűek (milyen vezetőképességűek) a vezetékek.

Távolítsuk el gondolatban a két lehűtött (szupravezetővé tett) tekercset egymástól egy kicsiny Δh távolsággal. A rendszer most energetikailag zárt, tehát az általunk végzett $W = F\Delta h$ munka a mágneses energia ΔE megváltozásával lesz egyenlő. Mivel a szupravezető tekercsek mágneses fluxusa nem változhat meg (ellenkező esetben feszültség indukálódna, és az „végtelen nagy” áramot indítana el bennük), a tekercsek eltávolítása közben nemcsak M, hanem I_1 és I_2 is változni fog. A tekercsek fluxusa, vagyis

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2, \qquad \text{illetve} \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

állandó marad, vagyis

$$L_1 \cdot \Delta I_1 + I_2 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_2 = 0,$$

továbbá

$$L_2 \cdot \Delta I_2 + I_1 \cdot \Delta M + M \cdot \Delta I_1 = 0.$$

Ha a fenti egyenletek bal oldalának I_1, illetve I_2-szörösét kivonjuk a mágneses energia

$$\Delta E = L_1 I_1 \Delta I_1 + L_2 I_2 \Delta I_2 + I_1 I_1 \Delta M + M(I_1 \Delta I_2 + I_2 \Delta I_1)$$

megváltozásából, azt kapjuk, hogy

$$\Delta E = -I_1 I_1 \Delta M > 0.$$

(A helyes eredmény csak egy előjelben tér el a naiv, hibás gondolatmenet eredményétől.)

A kölcsönös indukciós együttható kicsiny megváltozását az I. megoldásban alkalmazott módon (differenciálszámítással, vagy a Newton-formula alkalmazásával) számíthatjuk ki:

$$\Delta M = -\frac{3\pi}{2}\mu_0 N_1 N_2 R^2 r^2 h \big(h^2 + R^2\big)^{-5/2} \Delta h,$$

és így a keresett vonzóerő:

$$F = -I_1 I_2 \frac{\Delta M}{\Delta h} = +\frac{3\pi}{2}\mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 R^2 r^2 h \big(h^2 + R^2\big)^{-5/2}.$$

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)