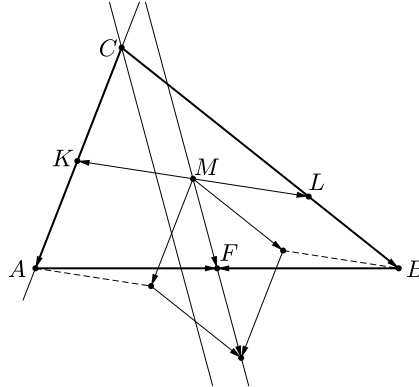


Megoldás. A feladat megoldása három jól elkülöníthető, önmagában is figyelemre érdemes lépésre bontható. Ezeket külön segédállításokként fogalmazzuk meg, ahol lehetséges, többféle indoklást is mutatunk.

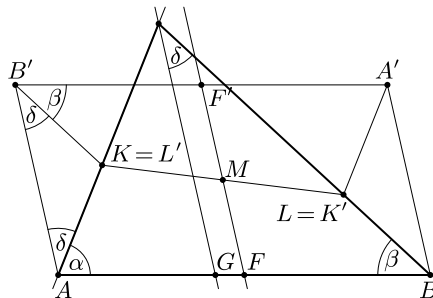
1. segédállítás. Ha az ABC háromszög AC és BC oldalain felvett K és L pontokra $AK = BL$, akkor az AB és KL szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az ACB szögfelezőjével.

1. bizonyítás (vektorokkal, Győrfy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Az AB szakasz felezőpontja legyen F , a KL szakaszé pedig M . A vektorok összeadásának definíciója szerint $\vec{MF} = \vec{MK} + \vec{KA} + \vec{AF}$ és $\vec{MF} = \vec{ML} + \vec{LB} + \vec{BF}$. Ebből, felhasználva, hogy $\vec{MK} = -\vec{ML}$ és $\vec{AF} = -\vec{BF}$, kapjuk, hogy $2\vec{MF} = \vec{KA} + \vec{LB}$. A feltétel szerint $|\vec{KA}| = |\vec{LB}|$, így a vektorösszeadást paralelogramma-módszerrel végezve egy rombuszt kapunk, aminek $2\vec{MF}$ átlója valóban felezi a $\vec{KA}$ és $\vec{LB}$ vektorok szögét, ahogy állítottuk (1. ábra). $\square$



1. ábra

2. bizonyítás (elemi szögszámítással, Daróczy Sándor (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., 11. évf.) megoldása). Használjuk a 2. ábra jelöléseit. Tükrözzük az $ABLK$ négyszöget és az F pontot középpontosan az M -re, így kapjuk az A' , B' , L' és K' , valamint F' pontokat. A tükrözés miatt $ABA'B'$ paralelogramma, aminek FF' középvonala, így $AFF'F'$ is paralelogramma; valamint $KB'A' \sphericalangle = \beta$. Továbbá $AK = BL = B'L'$ miatt a $B'AK \triangle$ egyenlőszárú, így $B'AK \sphericalangle = KB'A' \sphericalangle = \delta$. Mivel $\alpha + \beta < 180^\circ$, K az $ABA'B'$ paralelogramma belső pontja, és a 2. ábra helyes. Az ábráról leolvasható, hogy $\alpha + \beta + 2\delta$ egyenesszög, mivel egy paralelogramma egy szárán fekvő két szög összege. Ebből következik, hogy az $ABC \triangle$ -ben $C \sphericalangle = 2\delta$, amiből CG szögfelezése miatt $GCB \sphericalangle = \delta$. A tükrözés miatt $B'K \parallel BL = BC$, amiből $GCB \sphericalangle = AB'K \sphericalangle$ miatt $CG \parallel B'A \parallel F'F$, amivel az állítást beláttuk. $\square$

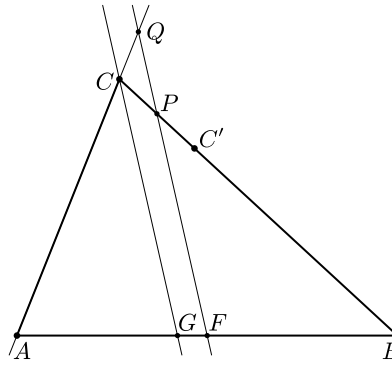


2. ábra

Megjegyzés. Az első, vektorokat használó megoldásból kitűnik, hogy nem szükséges feltennünk, hogy K és L a háromszög oldalainak egy-egy pontja, elegendő, hogy az oldalegyeneseken vannak, és $AK = BL$. Azonban attól függően, hogy K és L melyik A -hoz illetve B -hez tartozó félegyenesre kerül, változhat, hogy a C melyik szögfelezőjével lesz párhuzamos az FM egyenes.

2. segédállítás. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja legyen F , és F -en keresztül húzzuk meg a BCA szög (belső) szögfelezőjével párhuzamos e egyenest. Ekkor az e egyenes felezi az $ABC \triangle$ területét.

1. bizonyítás (az 1. segédállításból közvetlenül). Az $a = b$ eset triviális, így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > b$, és használjuk a 3. ábra jelöléseit. Legyen C' a BC oldal azon pontja, amelyre $BC' = AC$, továbbá legyen P a CC' szakasz felezőpontja. Alkalmazzuk az 1. segédállítást a $K = C$ és $L = C'$ pontokra. Kapjuk, hogy a PF egyenes párhuzamos a CG szögfelezővel, azaz $PF = e$. Az $AF = FB$, $AC = BC'$ és $C'P = PC$ nyilvánvaló egyenlőségekből adódik az állítás. $\square$



3. ábra

2. bizonyítás (szögfelező-tételből, Győrfy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása). Ismét feltesszük, hogy $a > b$. A szögfelező-tétel szerint egy háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, azaz $AG/GB = b/a$. Innen arányos osztással $GB = ca/(a + b)$ azonnal adódik. Az $ABC\triangle$ -ben felírhatjuk a párhuzamos szelők tételét a CG szögfelezőre és az e egyenesre – a P pontot most $e \cap BC$ -ként definiáljuk:

$$\frac{BF}{BG} = \frac{BP}{BC}.$$

Innen

$$BP = \frac{c/2}{ca/(a+b)} \cdot a = \frac{a+b}{2},$$

és végül $BF + BP = c/2 + (a+b)/2 = k/2$ valóban a terület fele, ahogy állítottuk. $\square$

3. bizonyítás (Menelaosz-tételből). Továbbra is feltesszük, hogy $a > b$. Messe e a BC -t P -ben, az AC -t pedig Q -ban a 3. ábra szerint. Mivel e párhuzamos a CG szögfelezővel, $PQC\angle = GCA\angle = GCB\angle = CPQ\angle$, azaz $PQC\triangle$ egyenlőszárú. Írjuk fel a Menelaosz-tételt az $ABC\triangle$ -re és az e egyenesre:

$$AF \cdot BP \cdot CQ = BF \cdot AQ \cdot CP.$$

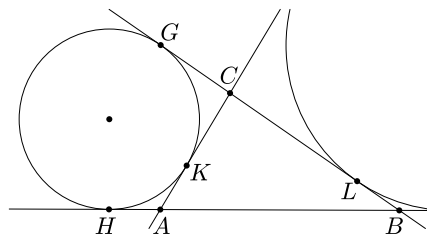
Az $AF = BF$ és $PC = CQ$ egyszerűsítések után $AQ = BP$ adódik, amiből $PC = CQ = x$ jelöléssel $a - x = b + x$, és $x = (a - b)/2$ következik. Így $FA + AC + CP = c/2 + b + (a - b)/2 = k/2$, ahogy állítottuk. $\square$

3. segédállítás. Az ABC háromszög AC , illetve BC oldalaihoz írt köröknek az oldalakon levő érintési pontjai rendre K és L . Ekkor $AK = BL$.

Bizonyítás. Az állítás jól ismert, a teljesség kedvéért közöljük a bizonyítását. A szokásos jelöléseket használjuk, $s = (a + b + c)/2$ az $ABC\triangle$ félkerülete. Az AC oldalhoz írt kör érintési pontjai az AB és BC oldalegyeneseken legyenek rendre H és G . Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, azért $CG = CK$, $AH = AK$ és $BG = BH$. Ezeket felhasználva

$$BH + BG = BA + AH + BC + CG = BA + AK + BC + CK = a + b + c = 2s,$$

így $BH = s$, és $AK = AH = BH - BA = s - c$ adódik. Hasonló számolással $BL = s - c$, amiből az állítás következik. $\square$



4. ábra

A B. 4843. feladat megoldása. A három segédállításból a feladat állítása azonnal következik. A 3. segédállítás szerint $AK = BL$. Ezután az 1. segédállítás miatt a KL és AB szakaszok felezőpontjain átmenő egyenes párhuzamos az $ACB\angle$ szögfelezőjével, végül a 2. segédállítás szerint felezi a háromszög területét. $\square$