

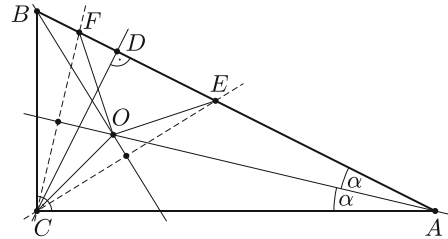
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a két kör középpontja egybeesik. Jelölje 2α az ABC háromszög A -nál lévő szögét, O pedig a háromszög szögfelezőinek metszéspontját. Mivel a merőleges szárú hegyesszögek egyenlőek, ezért $CAD\angle = BCD\angle = 2\alpha$ (1. ábra), tehát

$$FCA\angle = FCD\angle + DCA\angle = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Az AFC háromszögben a szögek összege 180° , tehát

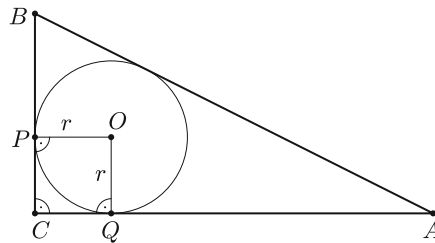
$$AFC\angle = 180^\circ - (FCA\angle + CAF\angle) = 90^\circ - \alpha.$$

Ezért az AFC háromszög egyenlőszárú, amiből következik, hogy szárszögének szögfelezője merőleges az alapjára. Tehát CF szakaszfelező merőlegese az AO egyenes. Ugyanígy kapjuk, hogy CE szakaszfelező merőlegese pedig a BO egyenes. Mivel két oldalflező merőleges metszéspontja meghatározza a CEF háromszög körülírt körének középpontját, ezért az egybeesik O -val.



1. ábra

Jelölje P , illetve Q az ABC háromszög beírt körének a befogókon lévő érintési pontjait (2. ábra). Mivel bármely külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $CP = CQ$. Nyilván teljesül $OP = OQ$ is, tehát a $CPOQ$ négyszög deltoid. Kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, továbbá $PCQ\angle = 90^\circ$, ezért a deltoidnak van három derékszöge, tehát téglalap is. Ha viszont egy deltoid téglalap, akkor az négyzet.



2. ábra

A két kör sugarainak keresett aránya tehát megegyezik a $CPOQ$ négyzet OP oldalának és OC átlójának arányával, azaz $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.