

I. megoldás. Úgy látjuk be az állítás helyességét, hogy megadunk egy „algoritmust” egy ilyen n -jegyű szám elkészítéséhez.

Nézzük meg az első néhány megoldást:

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \longrightarrow 2 = 2 \cdot 1; \\ n = 2 & \longrightarrow 12 = 2^2 \cdot 3; \\ n = 3 & \longrightarrow 112 = 2^3 \cdot 14; \\ n = 4 & \longrightarrow 2112 = 2^4 \cdot 132; \\ n = 5 & \longrightarrow 22112 = 2^5 \cdot 691; \\ n = 6 & \longrightarrow 122112 = 2^6 \cdot 1908. \end{array}$$

Megfigyelhető a következő szabályszerűség: ha a 2^n -nel való osztás eredménye páratlan szám, akkor 1-es, ha pedig páros szám, akkor 2-es számjegy kerül az előző szám elé.

Bebizonyítjuk, hogy ha továbbra is ezt az eljárást követjük, akkor a keletkező $n + 1$ -jegyű szám mindig osztható lesz 2^{n+1} -nel.

$n \geq 6$ esetén az előzőleg már megkapott n -jegyű szám 2^n -nel való osztásakor vagy páratlan, vagy páros számot kapunk.

I. eset: páratlan számot kapunk. Ekkor írjunk 1-et a szám elé. Az új szám $A = (10^n + n\text{-jegyű szám})$ alakú, vagyis

$$A = 2^n \cdot 5^n + 2^n(2l + 1) = 2^n(5^n + 2l + 1).$$

Mivel $5^n + 2l + 1$ páros szám, ezért $2^{n+1} \mid A$ teljesül.

II. eset: páros számot kapunk. Ekkor írjunk 2-est a szám elé. Az új szám ekkor $B = (2 \cdot 10^n + n\text{-jegyű szám})$ alakú:

$$B = 2 \cdot 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot 2k = 2^n(2 \cdot 5^n + 2k).$$

Mivel $2 \cdot 5^n + 2k$ páros szám, ezért $2^{n+1} \mid B$ teljesül.

Aadtunk egy eljárást, amellyel minden n pozitív egész szám esetén készíthető olyan 2^n -nel osztható n -jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.

II. megoldás. 2^n darab olyan n -jegyű szám van, amely csak 1-esből és 2-esből áll (mert minden helyiértékre két szám közül választhatunk).

Az összes ilyen n -jegyű számot elosztva rendre 2^n -nel legfeljebb 2^n darab különböző maradékot kaphatunk az osztás eredményeként (éspedig: $0; 1; 2; \dots; 2^n - 1$). Belátjuk, hogy minden ilyen n -jegyű szám különböző maradékot ad 2^n -nel osztva.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van két különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n -jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja 2^n -nel osztva. Így a két szám különbsége (a nagyobbikból a kisebbet kivonva) osztható lesz 2^n -nel.

Ez a különbség legfeljebb n -jegyű szám lehet, melynek az „első” nem 0 számjegye (az 1-es helyiértéktől indulva a nagyobbak felé) vagy 1-es (a $2 - 1$ miatt), vagy 9-es (az $1 - 2$ miatt). Így ez a különbségként kapott szám $A \cdot 10^k$ alakú lesz, ahol A egy páratlan természetes szám, míg k a 0-k száma az (1-es helyiértéktől indulva) első 1-es vagy 9-es jegyig.

Mivel a különbség legfeljebb n -jegyű, a fentiek alapján legfeljebb $(n - 1)$ darab 0-ra végződhet, azaz a különbség legfeljebb 2^{n-1} -gyel osztható (hiszen $10^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}$). Ellentmondáshoz jutottunk, tehát nincs két olyan különböző, csak 1-esből és 2-esből álló n -jegyű szám, amely ugyanazt a maradékot adja a 2^n -nel való osztásnál. Vagyis minden maradék különböző.

Figyelembe véve, hogy pontosan 2^n darab, a feltételeknek megfelelő n -jegyű szám van, így pontosan 2^n darab különböző maradékunk van, vagyis van (pontosan egy darab) olyan n -jegyű szám, amely csupa 1-esből és 2-esből áll és 2^n -nel való osztási maradéka 0 – és ezt akartuk bizonyítani.