

Williams Kada megoldása. Szeretnénk tehát egy olyan egész együtthatós nemkonstans homogén $f(x, y)$ polinomot találni, amire $f(x, y) = 1$, ha $(x, y) \in S$. (Homogénnek nevezünk egy többváltozós polinomot, ha benne minden tag fokszáma egyenlő.)

Az $f(x, y)$ polinom létezését $|S|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ehhez felhasználjuk az ún. Bézout-lemmát, ami szerint bármely x és y egész számok legnagyobb közös osztója előállítható $ax + by$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Az $|S| = 1$ esetből indulunk ki: ha $S = \{(x, y)\}$, akkor a Bézout-lemma szerint alkalmas $a, b \in \mathbb{Z}$ -re $f(x, y) = ax + by$ megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy az $S = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$ halmaz minden pontján $g(x, y) = 1$, és szeretnénk az (a_{m+1}, b_{m+1}) elemet hozzácsatolni. A Bézout-lemma szerint $Aa_{m+1} + Bb_{m+1} = 1$ alkalmas $A, B \in \mathbb{Z}$ -re. Mivel a

$$h(x, y) = \prod_{i=1}^m (a_i y - b_i x)$$

polinom értéke minden S -beli pontban 0, azért $C, K \in \mathbb{Z}$ -re az

$$f(x, y) = g(x, y)^K - C \cdot (Ax + By)^{K \cdot \deg g - m} h(x, y)$$

homogén polinom értéke minden S -beli pontban 1 (feltesszük, hogy $K \geq m$), míg

$$f(a_{m+1}, b_{m+1}) = g(a_{m+1}, b_{m+1})^K - C \cdot \underbrace{h(a_{m+1}, b_{m+1})}_{=: M}.$$

Azt állítjuk, hogy $g(a_{m+1}, b_{m+1})$ és $M = h(a_{m+1}, b_{m+1})$ egymáshoz relatív prím. Valóban, ha lenne közös p prímosztójuk, akkor $p \mid m$ miatt p osztója lenne az M valamelyik $a_i b_{m+1} - b_i a_{m+1}$ tényezőjének ($1 \leq i \leq m$). Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$\begin{aligned} b_i^{\deg g} g(a_{m+1}, b_{m+1}) &= g(b_i a_{m+1}, b_i b_{m+1}) \equiv g(a_i b_{m+1}, b_i b_{m+1}) = \\ &= b_{m+1}^{\deg g} g(a_i, b_i) = b_{m+1}^{\deg g} \pmod{p}, \end{aligned}$$

s így $p \mid g(a_{m+1}, b_{m+1})$ -ből $p \mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M \neq 0$, akkor a relatív prímiség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1})^{\varphi(|M|)} \equiv 1 \pmod{M}$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K = m\varphi(|M|)$ választással alkalmas $C \in \mathbb{Z}$ -re $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ biztosítható. Ha pedig $M = 0$, akkor a 0-hoz való relatív prímiség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1}) = \pm 1$, s így $K = 2$ és $C = 0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

<https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu>

címen.