

Megoldás. A feladat *ábráján* látható helyzetben a test sebessége az energiamegmaradás

$$mg\ell(1 - \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2}$$

törvénye szerint $v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha)}$, így a test centripetális gyorsulása

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{\ell} = 2g(1 - \cos \alpha).$$

Az érintőirányú (tangenciális) gyorsulást a nehézségi erő érintőirányú komponense ($mg \sin \alpha$) „hozza létre”, hiszen az elhanyagolható tömegű rúd csak rúdirányú erőt tud kifejteni. A tangenciális gyorsulás nagysága $a_t = g \sin \alpha$.

A kétféle gyorsulás nagysága akkor egyezik meg, ha fennáll:

$$\sin \alpha = 2(1 - \cos \alpha).$$

Négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$1 - \cos^2 \alpha = 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha,$$

vagyis az $x = \cos \alpha$ ismeretlenre az

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $x_1 = 0$, vagyis $\alpha_1 = 0$ (ez a függőleges instabil egyensúlyi helyzetnek felel meg, ahol $a_t = a_{\text{cp}} = 0$), a másik gyök pedig

$$x_2 = \frac{3}{5}, \quad \text{azaz} \quad \alpha_2 \approx 53,13^\circ.$$

Kezdetben a test nyilván nyomja a rudat, a rúd pedig „nyomja” felfelé a testet. A későbbiekben ez az erő egyre csökken, és valamekkora α_0 szögnél nullává válik, majd húzóerőbe vált át. A határesetet az jellemzi, hogy a centripetális erő éppen egyenlő a nehézségi erő rúdirányú komponensével, vagyis a centripetális gyorsulás megegyezik a nehézségi gyorsulás rúdirányú összetevőjével:

$$\frac{v^2}{\ell} = 2g(1 - \cos \alpha_0) = g \cos \alpha_0, \quad \text{vagyis} \quad \cos \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_0 \approx 48,2^\circ.$$

Ennél kisebb α szögeknél a rúd (ferdén felfelé) nyomja a pontszerű testet, nagyobb szögeknél pedig (ferdén lefelé) húzza azt. Mivel a korábban kiszámított szögekre $\alpha_2 > \alpha_0$ teljesül, amikor a centripetális gyorsulás nagysága megegyezik az érintőirányú gyorsulással, a rúd már *húzza* a pontszerű testet.