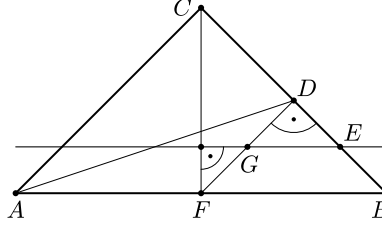


I. megoldás. Legyen E a BD szakasz felezőpontja. Mivel G az FD szakasz a felezőpontja, azért EG a BDF háromszögnek középvonala, és így $EG \parallel BF$. Mivel BF merőleges CF -re, azért EG is merőleges CF -re (1. ábra).



1. ábra

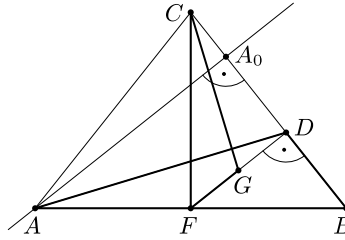
Továbbá, mivel FD merőleges BC -re, EG pedig CF -re, azért a G pont az FEC háromszög magasságpontja. Ebből következik, hogy CG merőleges az EF szakaszra.

Az ABD háromszögben E a BD oldal, F pedig az AB oldal felezőpontja, így EF az ABD háromszög középvonala, amiből következik, hogy $EF \parallel AD$.

Mivel CG merőleges EF -re, azért merőleges az EF -fel párhuzamos AD szakaszra is.

II. megoldás. $\angle AFC = \angle BFC = 90^\circ$. Az A pontból állítsunk merőlegest a BC oldalra, talppontját nevezzük A_0 -nak.

$\angle ABC = \angle CFD$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az AA_0B és a CFD derékszögű háromszögeknek két szöge is megegyezik, így hasonlóak. Az AB oldal merőleges a CF -re, ha ezeket azonos szöggel forgatjuk azonos (pozitív vagy negatív) irányba, az általuk bezárt szög 90° marad (2. ábra).



2. ábra

Mivel F az AB oldal felezőpontja és $FD \parallel AA_0$, azért az FD az ABA_0 háromszög középvonala és D a BA_0 szakasz felezőpontja. Tehát AD az AA_0B háromszög A csúcsából a szemközti oldal felezőpontjába megy, hasonlóan a CG a CFD háromszög C csúcsából az FD felezőpontjába. Így az ABD háromszög hasonló a CFG háromszöghöz. Emiatt $\angle BAD = \angle FCG$. Tehát ha ezzel a szöggel forgatjuk el az AB , illetve a CF szakaszokat, melyekről tudjuk, hogy merőlegesek egymásra, akkor pontosan az AD szakasz, illetve a CG szakasz egyenesére jutunk, azaz ezek is merőlegesek egymásra.

III. megoldás. Bizonyítandó, hogy az AD szakasz merőleges a CG -re. Vektorokkal ez úgy írható fel, hogy a skaláris szorzatuk 0, tehát $\vec{AD} \cdot \vec{CG} = 0$. Ezt szeretnénk belátni. Alakítsuk a bal oldalt:

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{CG} &= (\vec{AF} + \vec{FD}) \cdot \frac{\vec{CF} + \vec{CD}}{2} = \\ &= \frac{\vec{AF} \cdot \vec{CF} + \vec{AF} \cdot \vec{CD} + \vec{FD} \cdot \vec{CF} + \vec{FD} \cdot \vec{CD}}{2}. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\vec{AF} \perp \vec{CF}$ és $\vec{FD} \perp \vec{CD}$, tehát skaláris szorzatuk 0. Így a kifejezést tovább alakítva, az egyenlő lesz az alábbival:

$$\frac{\vec{AF} \cdot \vec{CD} + \vec{FD} \cdot \vec{CF}}{2} = \frac{\vec{AF}(\vec{CF} + \vec{FD}) + \vec{FD}(\vec{CB} + \vec{BF})}{2}.$$

Mivel $\vec{AF} \perp \vec{CF}$ és $\vec{FD} \perp \vec{CB}$, azért ez egyenlő az alábbival:

$$\frac{\vec{AF} \cdot \vec{FD} + \vec{FD} \cdot \vec{BF}}{2} = \frac{\vec{FD}(\vec{AF} + \vec{BF})}{2}.$$

Mivel $\vec{AF} + \vec{BF} = \vec{0}$, így ezzel beláttuk, hogy az $\vec{AD} \cdot \vec{CG}$ szorzat valóban zérus, tehát az $\vec{AD}$ és $\vec{CG}$ szakaszok derékszöget zárnak be egymással.

IV. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a következőképpen: $F(0;0)$, $A(-b;0)$, $B(b;0)$, $C(0;c)$. Ekkor $\overrightarrow{CB}(b;-c)$, az FD egyenes egyenlete $bx - cy = 0$, másképp $x = \frac{c}{b}y$; a CB egyenes egyenlete pedig $cx + by = cb$.

Mivel a két egyenes metszéspontja D , ezért a CB egyenletébe behelyettesítve $x = \frac{c}{b}y$ -t, megkapjuk D koordinátáit:

$$D\left(\frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

G az FD felezőpontja:

$$G\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{1}{2} \cdot \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

Ebből

$$\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2}; \frac{1}{2} \cdot \frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AD}\left(\frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2}; \frac{cb^2}{c^2+b^2}\right).$$

A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele az, hogy a skaláris szorzat 0 legyen:

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2b}{c^2+b^2} \cdot \frac{2c^2b+b^3}{c^2+b^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-cb^2-2c^3}{c^2+b^2} \cdot \frac{cb^2}{c^2+b^2} = 0.$$

Ezzel állításunkat beláttuk.