

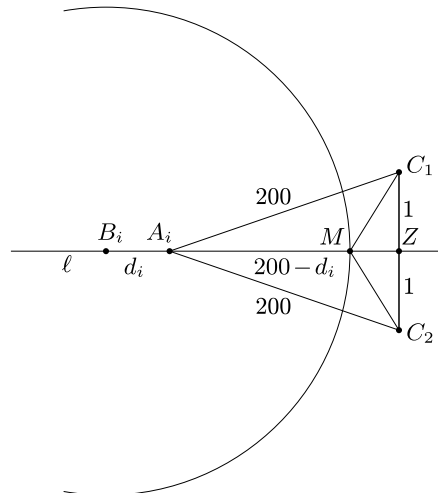
Kovács Benedek megoldása. A feladat állítása nem igaz: belátjuk, hogy a vadász akármilyen stratégiája esetén a nyomkövető jelezheti $P_1, P_2, \dots, P_{10^9}$ pontok olyan sorozatát, hogy a nyúlnek létezzen olyan, a szabályok szerinti $A_0 A_1 A_2 \dots A_{10^9}$ lehetséges mozgássorozata, amire $B_{10^9} A_{10^9} > 100$. Vagyis ha a nyúl maga jelölheti ki a nyomkövető jelzéseit a számára legkedvezőbb módon, akkor a vadász nem tudja garantálni, hogy 100-on belül kerüljön a nyúlhoz.

Legyen $d_i = A_i B_i$. A nyúl célja az, hogy $d_{10^9} > 100$ legyen. Nyilván az is elég számára, ha valamilyen $i < 10^9$ -re $d_i > 100$, hiszen ha ekkor a nyúl a további lépésekben már mindig a vadással ellentétes irányban lép, akkor lépésével a vadásztól való távolságát 1-gyel növeli, a vadász pedig a saját lépésében legfeljebb 1-gyel csökkentheti, vagyis egy fordulón belül a távolság nem csökken, így a 10^9 -edik forduló után is 100-nál nagyobb lesz.

Lemma. Ha az i . fordulóban $d_i < 100$, a vadász nem tudja garantálni, hogy $d_{i+200}^2 \leq d_i^2 + \frac{1}{2}$ legyen.

Bizonyítás. A nyúl tehát 200 forduló alatt szeretné a vadásztól vett távolságának négyzetét $\frac{1}{2}$ -nél többel megnövelni. A vadásznak az i -edik forduló kezdetekor a nyúl mozgásáról rendelkezésére álló információt a $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ pontok jelentik. Ezen pontok alapján a nyúlnek akár több lehetséges helye is lehet, de most tegyük fel még azt is, hogy a nyúl konkrétan elárulja a helyzetét, az A_i pontot. A korábbi információk így feleslegessé válnak.

Jelöljük ℓ -lel az $A_i B_i$ egyenest ($A_i = B_i$ esetén tetszőlegesen egyenest A_i -n keresztül). Mérjük fel az ábra szerint az ℓ egyenesre az A_i pontból, B_i -vel ellentétes irányban $\sqrt{39999}$ egységet, így kapva a Z pontot. A Z pontban merőlegest állítva ℓ -re, ezen a merőlegesen vegyük fel a C_1 és C_2 pontokat Z -től 1 távolságra. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $A_i C_1 = A_i C_2 = \sqrt{39999 + 1} = 200$ lesz.



A nyúl számára a következő 200 fordulóban az lesz a stratégia, hogy egyenesen elmegy a C_1 célpontba (ezt megteheti, hiszen $A_i C_1 = 200$). Mivel a teljes $A_i C_1$ szakasz 1 távolságon belül van az ℓ egyenestől, a nyúl minden fordulóban kijelölheti helyzetének az ℓ -re vett merőleges vetületét, mint a nyomkövető által adandó jelzést.

Természetesen ugyanezeket a jelzéseket megadhatná a nyúl akkor is, ha nem a C_1 , hanem a C_2 pontba menne el hasonló módon, hiszen a két útvonal ℓ -re nézve szimmetrikus. A vadász így a 200 forduló alatt kapott jelzésekből nem fogja tudni, hogy a C_1 vagy a C_2 pont felé tart-e a nyúl. Nézzük azt a B_{i+200} pontot, ahova a vadász ezalatt eljutott. Ez a pont biztosan a B_i középpontú, 200 sugarú körön belül van, legyen ennek az ℓ -lel való (a nyúl irányába eső) metszéspontja M .

Osszuk fel ezt a kört két részre az ℓ egyenes ($C_1 C_2$ felezőmerőlegese) mentén. Az egyik (az ábra szerint felső) részben lévő pontok a C_1 célponthoz, a másik (alsó) részben lévő C_2 -höz vannak közelebb. A felső rész összes pontjára igaz, hogy legalább olyan távol vannak C_2 -től, mint M , mert mind vízszintesen, mind függőlegesen legalább olyan távol vannak tőle (ha az ábra szerint, vagyis az ℓ egyenessel párhuzamosnak vesszük a vízszintes irányt). Ugyanígy az alsó rész összes pontja legalább olyan távol van C_1 -től, mint M .

Így a két lehetséges célpont közül a távolabbi mindenképpen legalább olyan messze lesz a vadásztól, mint az $MC_1 = MC_2$ távolság. Számítsuk ki ezt a távolságot. $B_i A_i = d_i$, így $A_i M = 200 - d_i$. Így $MZ = A_i Z - A_i M = \sqrt{39999} - 200 + d_i$, és a Pitagorasz-tétel alapján

$$MC_1 = \sqrt{MZ^2 + C_1 Z^2} = \sqrt{(\sqrt{39999} - 200 + d_i)^2 + 1}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez a távolság nagyobb, mint $\sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i)^2 + 1} &> \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}, \\ (\sqrt{39\,999} - 200 + d_i)^2 + 1 &> d_i^2 + \frac{1}{2}, \\ d_i^2 + 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i + 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> d_i^2 + \frac{1}{2}, \\ 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i - 400\sqrt{39\,999} + 80\,000 &> \frac{1}{2}, \\ 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i + 400(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{2}, \\ (400 - 2d_i)(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{2}, \\ (200 - d_i)(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Mivel $d_i \leq 100$, azaz $200 - d_i \geq 100$, elég belátni, hogy

$$\begin{aligned}200 - \sqrt{39\,999} &> \frac{1}{400}, \\ 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> 1, \\ 79\,999 &> 400\sqrt{39\,999}.\end{aligned}$$

Négyzetre emelve:

$$79\,999^2 > 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ez pedig igaz, mert

$$79\,999^2 - 1 = 80\,000 \cdot 79\,998 = 16\,0000 \cdot 39\,999 = 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ekvivalens lépésekkel dolgoztunk, így a vadász számára rosszabbik távolság legalább $MC_1 > \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$, így a lemmát beláttuk.

A lemmából már következik a bizonyítandó állítás: a játék elején $d_0^2 = 0$, és a lemma szerint (teljes indukcióval) a vadász számára legrosszabb esetben $d_{200n}^2 > \frac{1}{2}n$, amíg a távolság el nem éri a 100-at. Ez az elérés pedig legkésőbb $n = 2 \cdot 100^2 = 20\,000$ -re bekövetkezik, azaz $200 \cdot 20\,000 = 4 \cdot 10^6$ fordulón belül. Vagyis $d_{4 \cdot 10^6}^2 > 10\,000$, azaz $d_{4 \cdot 10^6} > 100$. A nyúl ezzel elérte a célját, hiszen $4 \cdot 10^6 \leq 10^9$.