

Matolcsi Dávid megoldása. Ha $f(0) = 0$, akkor $y = 0$ -nál ezt kapjuk:

$$f(f(x)f(0)) + f(x+0) = f(0 \cdot x).$$

Ebben az esetben $f(x) = 0$ minden x -re. Ez valóban megoldása a függvényegyenletnek.

Most nézzük azt az esetet, amikor $f(0) \neq 0$. Ha $x = 0$ és $y = 0$, akkor

$$f(f(0)^2) + f(0) = f(0), \quad f(f(0)^2) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $f(c) = 0$ és $c \neq 1$. Ha $y = 1 + \frac{1}{x-1}$, akkor $(x-1)(y-1) = 1$, azaz $x+y = xy$, ezért $f(x+y) = f(xy)$, így $f(f(x)f(y)) = 0$.

Legyen $x = c$ és $y = 1 + \frac{1}{c-1}$. Ekkor $f\left(f(c)f\left(1 + \frac{1}{c-1}\right)\right) = 0$. Mivel $f(c) = 0$, $f(0) = 0$, ez viszont ellentmond az elején kikötött feltételnek.

Azt kaptuk, hogy $f(c) = 0$ esetén $c = 1$, így $f(0)^2 = 1$, ezért $f(1) = f(f(0)^2) = 0$, továbbá $f(0) = 1$ vagy $f(0) = -1$.

Világos, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha $-f(x)$ is megoldása (mindkét oldal előjele megfordul). Ezért az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $f(0) = -1$.

Helyettesítsünk most az egyenletbe $y = 1$ -et:

$$\begin{aligned} f(f(x)f(1)) + f(x+1) &= f(1 \cdot x), \\ f(0) + f(x+1) &= f(x), \\ f(x+1) &= f(x) + 1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy n egészekre $f(x+n) = f(x) + n$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ injektív. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis létezik olyan $A \neq B$, hogy $f(A) = f(B)$. Legyen n egy A -nál nagyobb egész, és legyen $A - n = a$ és $B - n = b$, ahol tudjuk, hogy a negatív.

Ha $f(A) = f(B)$, akkor $f(a) = f(b)$. Az $x^2 - bx + a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 4(a-1)$, ami pozitív (mivel $a-1$ negatív), ezért az egyenletnek két gyöke van, r és s . A Viète-formulákból tudjuk, hogy $r+s = b$ és $rs = a-1$; így $x = r$ és $y = s$ választással $f(f(r)f(s)) + f(b) = f(a-1) = f(a) - 1$.

Az egyenletből kivonható $f(a) = f(b)$: $f(f(r)f(s)) = -1$, $f(f(r)f(s) + 1) = 0$, amiből $f(r)f(s) + 1 = 1$, azaz $f(r)f(s) = 0$. Feltehető, hogy $s = 1$, ekkor $a = 1 \cdot r + 1$ és $b = r + 1$, tehát $a = b$, ezzel ellentmondásra jutottunk; a függvény valóban injektív.

Legyen $y = 1 - x$. Ekkor $f(f(x)f(1-x)) + f(1) = f(x(1-x))$,

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x-x^2).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(1-x) = x - x^2$.

Legyen most $y = -x$. Ekkor $f(f(x)f(-x)) + f(0) = f(-x^2)$,

$$f(f(x)f(-x)) - 1 = f(-x^2),$$

$$f(f(x)f(-x)) = f(1-x^2).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(-x) = 1 - x^2$, ezért $f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = x - x^2 - (1 - x^2) = x - 1$. Másrészt

$$f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = f(x)(f(1-x) - f(-x)) = f(x).$$

Így $f(x) = x - 1$ minden x -re. Ez valóban jó megoldás: $(x-1)(y-1) - 1 + x + y - 1 = xy - 1$.

Ez volt a megoldás, amikor $f(0) = -1$, és ennek az ellentettje, $f(x) = 1 - x$ a megoldás, amikor $f(0) = 1$.

Tehát a függvényegyenletnek három megoldása van: $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ és $f(x) = 1 - x$.