

A feladat többféle módszerrel is megoldható. Az alább bemutatott eljárások közül kettő fizikai (optikai, illetve hangtani) megfontolásokra épül, a harmadik a differenciálszámítás matematikai apparátusának felhasználásával jut el a végeredményig. (A három különböző gondolatmenetű megoldás jelöléseit úgy változtattuk meg, hogy az eredmények egymással könnyen összehasonlíthatóak legyenek. – A Szerk.)

I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot fizikai eszközökkel! Használjuk a fényterjedést leíró *Fermat-elvet*: a fény két pont között olyan útvonalon terjed, amely mentén a fényterjedés ideje a szomszédos (a tényleges útvonaltól csak kicsit eltérő) útvonalak idejéhez képest a lehető legkisebb.

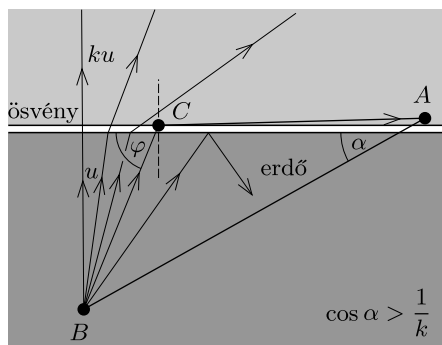
Tegyük fel, hogy az ösvény B -vel átellenes felén mindenhol ku sebességgel haladhatunk, és az A pont az ösvénytől egy „hajszálnyí” távolságra, de már az ösvény túloldalán helyezkedik el. (Ez érdeemben nem módosítja a feladatot, hiszen ha már egyszer elértük az ösvényt, azon nyilván gyorsan és egyenesen érdemes haladjunk, nem pedig a túloldali erdőben görbe útvonal mentén és lassabban.)

Ebben az új megfogalmazásban a probléma a következő kérdéssel egyenértékű: Miként juthat el a fény egy optikailag sűrűbb közeg B pontjából az optikailag ritkább közeg A pontjába, ha a két közeget egy sík felület választja el egymástól és a relatív törésmutató (a fénysebességek aránya) k ?

A B pontból kiinduló fénysugarak a két közeg határán megtörnek, illetve visszaverődnek. Ha a k törésmutató „elegendően nagy”, akkor a törési törvény szerint lesz egy olyan fénysugár, amelynek törési szöge 90° , vagyis amelyik fénysugár a két közeg határán (az ösvény mentén) halad tovább és jut el az A pontig (*1a. ábra*). Ezen fénysugár beesési szöge az ábra jelöléseit használva éppen $90^\circ - \varphi$, így a Snellius–Descartes-törvény szerint

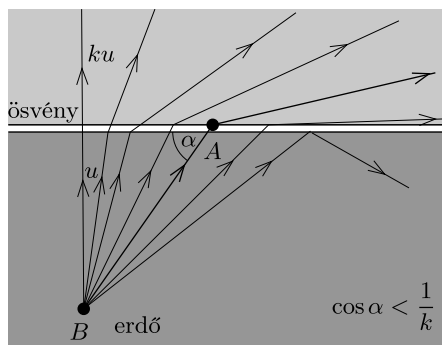
$$\frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin 90^\circ} = \cos \varphi = \frac{1}{k}.$$

A közeget határt a C ponttól balra elérő fénysugarak átjutnak az optikailag ritkább közegbe, a C -től jobbra érkező fénysugarak pedig teljes visszaverődést szenvednek. Az ábrán látható φ szög nyilván nagyobb, mint α , tehát a megadott k és α adatok között fenn kell álljon a $\cos \alpha > \frac{1}{k}$ egyenlőtlenség; ez adja meg az „elegendően nagy törésmutató” kifejezés pontos jelentését.



1a. ábra

Amennyiben a törésmutató nem túl nagy (vagyis $\cos \alpha < 1/k$), a B -ből kiinduló fénysugarak egyike törésmentesen, mindvégig az optikailag sűrűbb közegben haladva jut el az A pontig (*1b. ábra*). Ilyen körülmények között az eredeti feladat megoldása: érdemes mindvégig az erdőben maradnunk, és ott egyenes úton haladva juthatunk el leghamarabb a B pontból az A pontig.



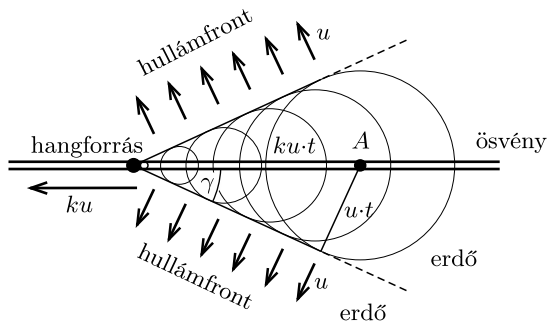
1b. ábra

II. megoldás. Ha a B pontból valamilyen úton haladva a legrövidebb idő alatt jutunk az A pontba, akkor nyilván ugyanezen az útvonalon juthatunk leghamarabb az A pontból a B pontba. Vizsgáljuk a továbbiakban ezt a „megfordított” problémát!

Képzeliük el, hogy az A pontból indulva egy hangforrás mozog az ösvény mentén ku sebességgel, miközben folyamatosan olyan hanghullámokat kelt, amelyek u sebességgel terjednek az erdőben ($k > 1$). Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyeket a hanghullámok elérnek a hullámforrás indulásától számított t idő alatt? A különböző helyekről különböző időpillanatokban kiinduló gömbhullámok egy kúpot (az ún. *Mach-kúpot*) jelölnek ki (2a. ábra). A kúp csúcsa ku sebességgel mozog, a kúp félnyílásszöge

$$\gamma = \arcsin \frac{u}{ku} = \arcsin \frac{1}{k},$$

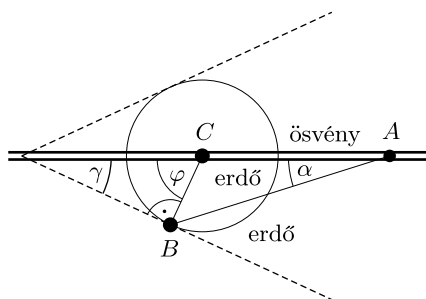
a kúp alkotói pedig u sebességgel mozogva távolodnak a szimmetriatengelytől (vagyis az ösvénytől). A γ szög (az ún. *Mach-szög*) egyértelműen meghatározható, hiszen a feladat szövege szerint $k > 1$.



2a. ábra

Az idő múltával lesz egy olyan pillanat, amikor az egyre táguló kúp alkotója (vagyis a hullámfront) eléri a B pontot (2b. ábra). Tekintsük a B ponton átmenő, a hullámfrontra merőleges egyenes és az ösvény metszéspontját. Ezen C pontból kiinduló hullám éri el leghamarabb a B pontot, tehát ezen a ponton vezet át az eredeti feladat megoldása, a legrövidebb idejű útvonal is. Ezek szerint

$$\varphi = 90^\circ - \gamma, \quad \text{vagyis} \quad \cos \varphi = \sin \gamma = \frac{1}{k}.$$



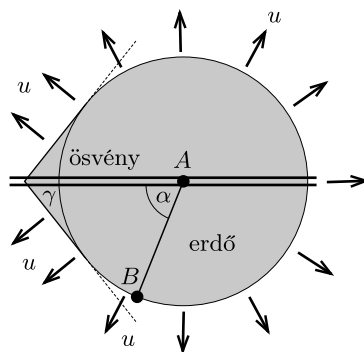
2b. ábra

Természetesen (az ábrán választott mozgásirány esetén) a C pont nem lehet A -tól jobbra, vagyis $\varphi \geq \alpha$. Emiatt a fentebb leírt megoldás csak

$$\cos \alpha \geq \cos \varphi = \frac{1}{k}$$

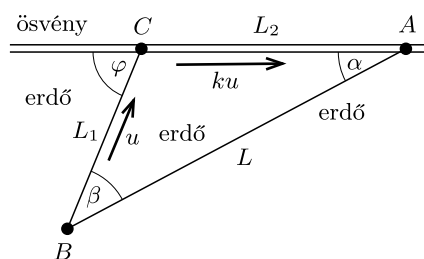
teljesülése esetén helyes. A $k \cos \alpha = 1$ határesetben $\varphi = \alpha$, vagyis a C pont egybeesik A -val. Ilyenkor a legrövidebb idő, ami alatt eljuthatunk A -ból B -be (vagy B -ből A -ba) olyan útnak felel meg, amely mindvégig az erdőben halad.

Vajon melyik útvonalon haladó hullám éri el leghamarabb a B pontot, ha $k \cos \alpha < 1$? Ebben az esetben nem a Mach-kúp hullámfrontja, hanem az A pontból kiinduló gömbhullám éri el elsőként a B pontot (2c. ábra), vagyis a legrövidebb idejű mozgás mindvégig az erdőben halad.



2c. ábra

III. megoldás. Jelöljük az A és B pont távolságát L -lel, azt a pontot pedig, ahol elérjük az ösvényt, C -vel (3. ábra). Az A és C , valamint a C és B pontok között nyilván egyenes utat érdemes választanunk. Az erdőben megtett út irányát a BA iránytól mért β szöggel, vagy az ösvény irányához viszonyított $\varphi = \alpha + \beta$ szöggel jellemezhetjük.



3. ábra

Az erdőben megtett út hossza (a szinusztétel alapján) $L_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} L$, az ösvényen megtett út hossza pedig $L_2 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} L$. A teljes menetidő a β szög függvényében:

$$t(\beta) = \frac{L_1}{u} + \frac{L_2}{ku} \equiv \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin \alpha + \frac{1}{k} \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

A függvény (számunkra érdekes) értelmezési tartománya $0 \leq \beta \leq 90^\circ - \alpha$, hiszen nyilván nem éri meg az ösvényt (az ábrán vázolt elrendezés esetén) az A ponttól jobbra, vagy a B -hez legközelebbi ponttól balra elérni.

A menetidő minimumát a $t(\beta)$ függvény deriváltjának eltűnése határozhatja meg. Ha létezik olyan β szög az értelmezési tartomány belsejében, ahol

$$\begin{aligned} 0 = t'(\beta) &= \frac{L}{u} \cdot \frac{\frac{1}{k} \cos \beta \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) \left(\sin \alpha + \frac{1}{k} \sin \beta \right)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{L}{u} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \left[\frac{1}{k} - \cos(\alpha + \beta) \right], \end{aligned}$$

ott a haladási időnek szélsőértéke (esetünkben minimuma) lehet. Mivel sem $(L/u) \sin \alpha$, sem pedig $\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin \varphi$ nem lehet nulla, a derivált csak akkor válhat nullává, ha

$$\frac{1}{k} = \cos(\alpha + \beta), \quad \text{vagyis} \quad k \cos \varphi = 1.$$

Mivel $\beta \geq 0$, vagyis $\varphi \geq \alpha$, a derivált nullává válásának feltétele csak

$$1 = k \cos \varphi \leq k \cos \alpha$$

esetben teljesülhet.

Amennyiben $k \cos \alpha < 1$ áll fenn, a $t(\beta)$ függvény monoton növekszik, így a legrövidebb idő a $\beta = 0$ szöghöz tartozik. Ilyen esetben (vagyis amikor az ösvényen haladás sebessége nem „elég nagy”) érdemes mindvégig az erdőben haladjunk, egyenes vonalban B -től az A pontig.