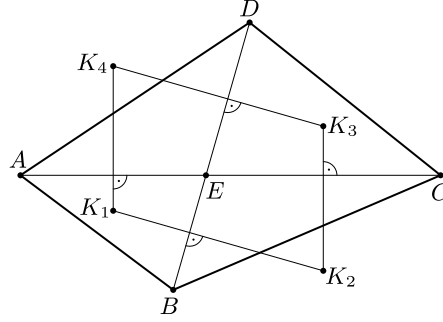


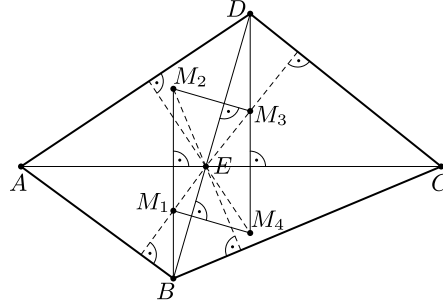
Megoldás. Mivel egy háromszög Feuerbach-körének középpontja a körülírt köre középpontjának és magasságpontjának a szakaszfelező pontja, így vizsgáljuk meg ezeket a pontokat.

Jelölje az ABE , BCE , CDE , ADE háromszögek körülírt körének középpontját rendre K_1 , K_2 , K_3 , K_4 (1. ábra). Mivel egy háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelezőinek a metszéspontja, így $K_1K_2 \parallel K_3K_4 \perp BD$ és $K_1K_4 \parallel K_2K_3 \perp AC$, így mivel két párhuzamos oldalpárja van $K_1K_2K_3K_4$ paralelogramma.



1. ábra

Legyenek a fenti háromszögek magasságpontjai rendre M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (2. ábra). A magasságpont a csúcsokból a szemközti oldalakra állított merőlegesek metszéspontja, így $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \perp AC$ és $M_1M_4 \parallel M_2M_3 \perp BD$, tehát hasonlóan az előzőhöz $M_1M_2M_3M_4$ is paralelogramma.



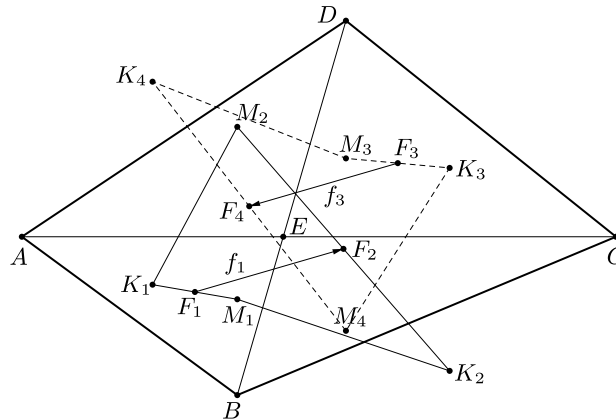
2. ábra

Legyen $\overrightarrow{K_1K_2} = \vec{k}_1$, $\overrightarrow{K_3K_4} = \vec{k}_3$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{m}_1$, $\overrightarrow{M_3M_4} = \vec{m}_3$. Mivel $K_1K_2K_3K_4$ és $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, így tudjuk, hogy $\vec{k}_1 = -\vec{k}_3$ és $\vec{m}_1 = -\vec{m}_3$. Mivel $K_1M_1K_2M_2$ négyszögben F_1F_2 középvonal (3. ábra), ezért tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{f}_1 = \frac{\vec{k}_1 + \vec{m}_1}{2}$$

Valamint hasonlóan a $K_3M_3K_4M_4$ négyszögben

$$\overrightarrow{F_3F_4} = \vec{f}_3 = \frac{\vec{k}_3 + \vec{m}_3}{2} = \frac{-(\vec{k}_1 + \vec{m}_1)}{2} = -\vec{f}_1.$$



3. ábra

Tehát $\vec{f}_3 = -\vec{f}_1$, így $F_1F_2 \parallel F_3F_4$ és egyenlő hosszúak, vagyis $F_1F_2F_3F_4$ valóban paralelogramma, vagy a négy pont egy egyenesre esik. Ezt kellett bizonyítani.