

Megoldás. A megoldás során elég annyit feltenni, hogy f egy a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett pozitív függvény; a korlátosság feltétele elhagyható. Indirekt bizonyítva fölteszük, hogy

$$(i) \quad \frac{(x_2 - x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)} \leq \frac{f(0)}{4}$$

teljesül minden x_1 és x_2 számra. (A továbbiakban mindig $x, x_1, x_2 \in [0, 1]$ és $x_2 \geq x_1$.) Ebből belátjuk, hogy

$$(ii) \quad \text{minden } n \text{ pozitív egész számhoz van olyan } c_n \text{ pozitív konstans, hogy minden } x\text{-re } f(x) \geq c_n x^n f(0).$$

Ehhez átrendezzük (i)-et (pozitív számokkal szorzunk):

$$(iii) \quad 4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \leq f(x_2)f(0);$$

$x_1 = 0$ -t behelyettesítve: $f(x_2)f(0) \geq 4x_2f^2(0)$, azaz $f(x_2) \geq 4x_2f(0)$ minden x_2 -re. Ezzel meg is kaptuk az első c_n értéket: $c_1 = 4$.

Tegyük fel, hogy kaptunk már egy pozitív c_n értéket, amely minden x -re teljesíti az $f(x) \geq c_n x^n f(0)$ egyenlőtlenséget. Ekkor (iii)-at felírva, majd x_1 -re alkalmazva az előbbi egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$f(x_2)f(0) \geq 4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \geq 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f^2(0).$$

Osztva $f(0) > 0$ -val és $x_1 = \frac{2nx_2}{2n+1}$ -et beírva:

$$f(x_2) \geq 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f(0) = 4c_n^2 f(0) \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot x_2^{2n+1}.$$

Ezek szerint a

$$c_{2n+1} = 4 \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot c_n^2$$

kielégíti (ii)-t.

Végül a k -ra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$c_{2^k-1} = \frac{2^{k \cdot 2^k}}{(2^k - 1)^{2^k-1}}.$$

Valóban, ez teljesül, ha $k = 1$, és ha egy adott k -ra igaz, akkor az előbbiek szerint

$$\begin{aligned} c_{2^{k+1}-1} &= c_{2(2^k-1)+1} = 4 \cdot \frac{(2(2^k-1))^{2(2^k-1)}}{(2(2^k-1)+1)^{2(2^k-1)+1}} \cdot c_{2^k-1}^2 = \\ &= 2^2 \cdot 2^{2^{k+1}-2} \cdot \frac{(2^k-1)^{2(2^k-1)}}{(2^{k+1}-1)^{2^{k+1}-1}} \cdot \frac{(2^{k \cdot 2^k})^2}{((2^k-1)^{2^k-1})^2} = \frac{2^{(k+1)2^{k+1}}}{(2^{k+1}-1)^{2^{k+1}-1}}, \end{aligned}$$

tehát teljesül $(k+1)$ -re is.

Így minden pozitív egész k -ra és minden $x \in [0, 1]$ -re igaz, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &\geq c_{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) = \frac{2^{k \cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}} x^{2^k-1} f(0) = \\ &= 2^k \cdot \left(\frac{2^k}{2^k-1} \right)^{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) \geq 2^k x^{2^k-1} f(0). \end{aligned}$$

Speciálisan, $x = 1$ -re:

$$f(1) \geq 2^k f(0),$$

minden pozitív egész k esetén. Mivel $f(0)$ pozitív, ez ellentmondás.