

I. megoldás. Először tisztázzunk elfajuló, illetve lehetetlen eseteket. A D vagy E pontok akkor eshetnek egybe valamelyik csúccsal, ha a háromszög derékszögű. Ha a derékszög B -nél van, akkor $D \equiv E \equiv B$, nem jöhetett létre a DE -egyenes. Ha A -nál vagy C -nél van (mivel a két eset lényegében ugyanaz, elég pl. csak az A csúcsra vizsgálni), akkor $A \equiv E \equiv M$, így $P \equiv M$, vagyis most a PM -egyenes nem jöhetett létre. Ezeken az eseteken kívül M nem eshet egybe se talpponttal, se csúccsal, se P -vel. Lehetséges még, hogy $AC \parallel DE$, ilyenkor $AEDC$ húrtrapéz, így $BAC \sphericalangle = BCA \sphericalangle$ miatt ABC egyenlő szárú. Tehát fel kell tenni még, hogy $BC \neq AB$.

Legyen az AC szakasz felezőpontja G . Bizonyítandó, hogy $BG \perp PM$. Mivel $CDA \sphericalangle = CEA \sphericalangle = 90^\circ$, azért D és E az AC szakasz Thálesz-körére illeszkedik. Ezt a kört jelölje k .

Másrészt $MDB \sphericalangle = BEM \sphericalangle = 90^\circ$, ezért D és E a BM szakasz Thálesz-körére is illeszkedik. Legyen ez a kör ℓ , a középpontja pedig BM felezőpontja, H .

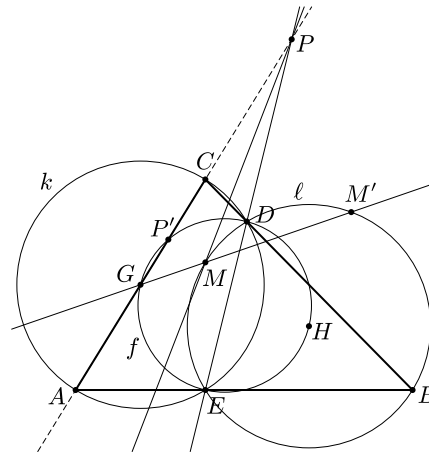
Most azt bizonyítjuk, hogy a GD szakasz (és hasonló módon a GE szakasz) az ℓ körhöz húzott érintőszakasz. G , D és H az ABC háromszög Feuerbach-körére¹ illeszkednek (melyet az 1. ábrán f -fel jelölünk), a körülírt kör K középpontját viszonyítási pontnak választva pedig

$$\begin{aligned} \frac{\vec{G} + \vec{H}}{2} &= \frac{\frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} + \frac{(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) + \vec{B}}{2}}{2} = \\ &= \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{2}, \end{aligned}$$

ami a Feuerbach-kör középpontjának helyvektora (felhasználtuk a

$$\vec{KM} = \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC}$$

összefüggést is). Így GH átmérő, a Thálesz-tétel miatt $GDH \sphericalangle = 90^\circ$, GD csakugyan érintőszakasz.



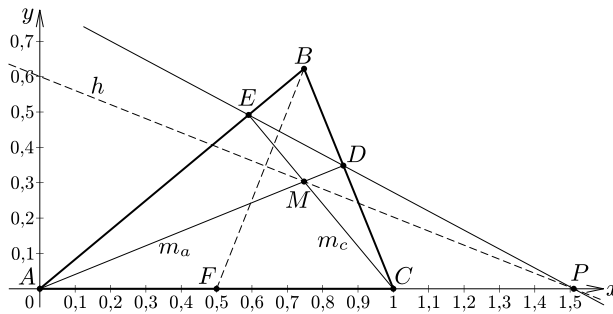
1. ábra

Most invertáljunk k -ra. A GD szakasz a k kör sugara, ezért – a szelősorzat-tételt is figyelembe véve – ℓ -nek a k -ra invertált képe önmaga. Keressük P képét. Az inverzió illeszkedéstartó, így P egyrészt a DE egyenes képére illeszkedik. A D és az E fixpontok, az egyenes pedig nem megy át G -n, így DE képe egy G -n átmenő kör: DEG körülírt köre, ami ismét ABC Feuerbach-köre. Másrészt P illeszkedik AC képére, ami fixegyenes. Így P' az AC oldalegyenes és a Feuerbach-kör metszéspontja. Két ilyen pont van: az egyik G , de az k középpontja, így nem lehet P képe. A másik a B -hez tartozó magasság talppontja, így ez a magasságtalppont lesz P képe. (Megjegyzés: ha a magasságtalppont és G egybeesnek, akkor ABC egyenlő szárú lett volna, amit kizártunk.) Így $GPB \sphericalangle = 90^\circ$. (Ha D , E és G egy egyenesen lennének, akkor DE is k átmérője lenne, így a Thálesz-tétel szerint $ECD \sphericalangle = DAE \sphericalangle = 90^\circ$ is igaz lenne, vagyis az ABC háromszög AE és CD oldalegyenesei párhuzamosak lennének, ami lehetetlen.)

Most határozzuk meg M' -t is. Ez rajta van az ℓ fixkörön, így GM és ℓ második metszéspontja. Mivel az ℓ kör BM Thálesz-köre, így $GM'B \sphericalangle = MM'B \sphericalangle = 90^\circ$ (ha M és M' fordított sorrendben helyezkednek el, akkor is igaz az állítás, mert kiegészítő szögek lesznek). Most már meghatározhatjuk PM képét. G -n nem mehet át, mert akkor az M pont $PG \equiv AC$ -n lenne, ami a derékszögű háromszög lehetetlen esetéhez vezet vissza. Így PM képe a G -n, P' -n és M' -n átmenő kör. Mivel $GM'B \sphericalangle = GP'B \sphericalangle = 90^\circ$, azért ez BG Thálesz-köre. Eközben BG egy G -n átmenő egyenes, így képe önmaga. Tehát PM képének centrálisa a BG egyenes, BG képe. Ez kör és egyenes között derékszöget jelent, így mivel az inverzió szögtartó, az eredeti PM egyenes és BG is merőlegesek voltak. Ezt kellett bizonyítani.

II. megoldás. Legyenek az A , B illetve C pont koordinátái rendre $(0; 0)$, $(a; b)$, $(1; 0)$, ahol $b \neq 0$, így állhat majd a számolás során törtek nevezőjében.

¹ <https://hu.wikipedia.org/wiki/Feuerbach-kör>.



2. ábra

A továbbiakban két főbb dolgot fogunk használni:

– Adott $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1 \right).$$

– Két, a tengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor merőleges egymásra, ha meredekségeik szorzata -1 .

Az AB egyenes egyenlete: $y = \frac{b}{a}x$.

A BC egyenes egyenlete: $y = -\frac{b}{1-a}x + \frac{b}{1-a}$.

A CE egyenes egyenlete: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$ (az állandót onnan tudjuk, hogy az egyenes átmegy a C ponton).

Az AD egyenes egyenlete: $y = \frac{1-a}{b}x$.

Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor az ABC háromszög A -ban vagy C -ben derékszögű, D és E egyike az x tengelyen van, egybeesik M -mel és a derékszögű csúccsal, így P is egybeesik M -mel, tehát P és M nem határoz meg egyenest. Ezeket az értékeket tehát kizárhatjuk.

Tudjuk, hogy D rajta van a BC és m_a egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (a D pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$-\frac{b}{1-a} \cdot x + \frac{b}{1-a} - \frac{1-a}{b} \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{b^2}{(1-a)^2 + b^2}.$$

(A számlálóban két nem 0 értékű szám négyzetének összege áll, tehát biztosan nem 0.) A D pont második koordinátája:

$$\frac{1-a}{b} \cdot \frac{b^2}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{b(1-a)}{(1-a)^2 + b^2}.$$

Tudjuk, hogy E rajta van az AB és m_c egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (az E pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$\frac{b}{a}x - \left(-\frac{a}{b}x + \frac{a}{b} \right) = 0,$$

$$x = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Itt $b \neq 0$, ezért a számláló sem 0. Az E pont második koordinátája:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

A DE egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{b(1-a)}{(1-a)^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}}{\frac{b^2}{(1-a)^2 + b^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2}}.$$

A nevezőben a D és az E pont első koordinátájának különbsége áll. Ha ez 0, akkor a két pont egybeesik egymással és a B csúccsal, vagyis az ABC háromszög B -ben derékszögű. Ekkor a feladat nem értelmezhető, így feltesszük, hogy ez nem igaz. A kifejezést egyszerűsítve a következőt kapjuk: $\frac{(1-2a)b}{-a^2 + a + b^2}$. (Lépések: $(a^2 + b^2)$ -tel, illetve $((1-a)^2 + b^2)$ -tel való bővítés, szorzattá alakítás, $b^2 + a^2 - 1$ szorzótenyezővel való egyszerűsítés. Ha ez utóbbinak 0 lenne az értéke,

akkor a nevező is 0 lenne, viszont nem 0 értékről indultunk, és csak szoroztunk nem 0 értékű kifejezésekkel, tehát nem lehet 0 a nevező. A végeredmény így egy értelmezhető tört.) Mivel $1 - 2a = 0$ esetén $AB = BC$, és ekkor nem jönne létre a P metszéspont, ezért feltehetjük, hogy $1 - 2a \neq 0$.

Mivel az egyenes átmegy az E ponton, a képletében szereplő konstans értéke:

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{(1 - 2a)b}{-a^2 + a + b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

aminek egyszerűbb alakja $\frac{ab}{-a^2 + a + b^2}$. (Lépések: $0 \neq (-a^2 + a + b^2)$ -tel való bővítés, összevonás, szorzattá alakítás, $0 \neq (a^2 + b^2)$ -tel való egyszerűsítés. Így a végeredmény egy értelmezhető tört.)

A DE egyenes egyenlete tehát:

$$y = \frac{(1 - 2a)b}{-a^2 + a + b^2}x + \frac{ab}{-a^2 + a + b^2}.$$

A P pontról tudjuk, hogy rajta van az AC egyenesen, vagyis második koordinátája 0, és rajta van a DE egyenesen, tehát felírható a következő egyenlet a P pont első koordinátájára: $\frac{(1 - 2a)bx + ab}{-a^2 + a + b^2} = 0$. Ez akkor igaz, ha $(1 - 2a)bx + ab = 0$, vagyis $x = \frac{-a}{1 - 2a}$.

Az M pont első koordinátája a , ugyanis a BM egyenes merőleges az x tengelyre. Mivel M rajta van az m_a egyenesen, második koordinátája $\frac{1 - a}{b}a = \frac{a - a^2}{b}$.

A PM egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{a - a^2}{b} - 0}{a - \frac{-a}{1 - 2a}} = \frac{\frac{a - a^2}{b}}{\frac{2a - 2a^2}{1 - 2a}} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{2}{1 - 2a}} = -\frac{1 - 2a}{2b}.$$

F koordinátái $(0; 0,5)$, ugyanis AC felezőpontja. Tehát a BF egyenes egyenlete: $\frac{b - 0}{a - 0,5} = \frac{2b}{2a - 1}$. Mivel $-\frac{1}{\frac{2b}{2a - 1}} = -\frac{1 - 2a}{2b}$, azért BF merőleges PM -re.

Megjegyzések. 1. A fő hiba a megoldásokban a diszkusszió hiánya volt. Ez a koordinátageometriai megoldásokban nem csupán geometriai, de algebrai hiányt is jelent, jellemzően 0-val való osztást.

2. Többen a számos fellépő húrnégyszöget használták ki, támaszkodva a kerületi szögek tételére, illetve bizonyos esetekben a hatványvonal tulajdonságaira; mivel sok kört lehetett észrevenni, több különböző úton is el lehetett jutni a megoldáshoz. Egy ilyen megoldás olvasható honlapunkon:

<https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4791&l=hu>.