

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Legyen $l_{ji} = l_{ij}$ minden $1 \leq i < j \leq n$ párra.

Határozzuk meg egyenként a továbbiakban potenciálnak nevezett $a_1, a_2, \dots, a_n$ mennyiségeket (nem feltétlenül ebben a sorrendben) a következő szabály szerint. Minden lépésben válasszunk egy olyan i indexet, amelyre az a_i potenciált korábban még nem határoztuk meg, és amelyre azon l_{ki} értékek s összege, amelyekre a_k -t már korábban meghatároztuk, a lehető legkisebb. Az így megválasztott i indexre legyen az a_i potenciál ez a minimális s összeg.

Tegyük fel, hogy az a_i potenciált az a_j potenciál előtt határoztuk meg, továbbá, hogy K az a_i előtt, M pedig az a_i után, de a_j előtt meghatározott a_t potenciálokhoz tartozó t indexek halmaza. Az eljárásból következően ekkor

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{k \in K} l_{kj} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq \sum_{k \in K} l_{ki} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} = \\ &= a_i + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq a_i + l_{ij}, \end{aligned}$$

tehát $|a_i - a_j| \geq l_{ij}$ valóban teljesül minden $i \neq j$ párra.

Az indoklás befejezéséhez pedig mindössze annyit kell megfigyelnünk, hogy

$$S := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

éppen az l_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$) értékek összege, hiszen minden egyes l_{ij} pontosan egyszer szerepel S -ben, mégpedig az a_i -t és a_j -t definiáló összegek közül abban, amelyik a később meghatározott potenciálhoz tartozik. $\square$

Megjegyzés. A feladat és a megoldása is sokkal világosabb, ha átfogalmazzuk gráfokra. Ilyen szóhasználatnál élve azt kell igazolnunk, hogy bárhogyan is rendelünk egy n pontú teljes gráf éleihez nemnegatív élhosszakot, a gráfnak létezik egy aciklikus (azaz irányított kört nem tartalmazó) irányítása, és az n csúcs mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy nemnegatív potenciál úgy, hogy a csúcsok potenciálösszege ne haladja meg az élek összhosszát, továbbá bármely uv irányított él esetén az u és v csúcsok potenciálkülönbsége legalább az uv él hossza legyen.

A megoldás kulcsa, hogy a potenciálok megválasztásának sorrendje az l_{ij} élhosszakhoz tartozó úgynevezett minvissza sorrend. Ez úgy kapható, hogy tetszőleges csúcsból kiindulva, ha már kiválasztottuk a sorrend első néhány elemét, akkor a soron következő csúcs az lesz, amelynek távolsága az eddig választott csúcsoktól minimális. Ha ezek után a gráf minden élét a minvissza sorrendben korábban felbukkanó csúcsból a sorrendben később szereplő csúcsba irányítjuk, akkor a potenciálokat természetes módon definiálva éppen a kérdéses a_i számokat kapjuk meg.

Érdekes, hogy míg a hasonló módon definiált maxvissza sorrendet sokat vizsgálták (a segítségével például hatékony algoritmus adható arra, hogy egy összefüggő gráfban megtaláljuk a lehető legkevesebb élt, amelyek elhagyásától a gráf már nem marad összefüggő), addig a minvissza sorrendnek a bizottság tudomása szerint nem ismert hasonló alkalmazása.