

Megoldás. Azt bizonyítjuk, hogy bármely pozitív egész n szám az (y_k) sorozatban pontosan kettővel többször fordul elő, mint az (x_k) sorozatban. A feltétel szerint

$$(1) \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 2.$$

A sorozatok definícióját terjesszük ki $k = 0$ -ra is; legyen $x_0 = y_0 = 0$. Minden nemnegatív egész n -re legyen

$$f(n) = \max\{k \geq 0 : x_k \leq n\} \quad \text{és} \quad g(n) = \max\{k \geq 0 : y_k \leq n\}.$$

Mivel

$$x_k \leq n \iff ak < n + \frac{1}{2} \iff k < \frac{n + \frac{1}{2}}{a} \iff k \leq \left\lceil \frac{n + \frac{1}{2}}{a} \right\rceil - 1,$$

ezért

$$f(n) = \left\lceil \frac{n + \frac{1}{2}}{a} \right\rceil - 1, \quad \text{és hasonlóan} \quad g(n) = \left\lceil \frac{n + \frac{1}{2}}{b} \right\rceil - 1.$$

Az (1) feltételből

$$\begin{aligned} g(n) &= \left\lceil \frac{n + \frac{1}{2}}{b} \right\rceil - 1 = \left\lceil \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{a} + 2\right) \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{n + \frac{1}{2}}{a} + 2n + 1 \right\rceil - 1 = \\ &= f(n) + 2n + 1. \end{aligned}$$

Világos, hogy $n \geq 1$ esetén az n szám az (x_k) sorozatban $f(n) - f(n-1)$, az (y_k) sorozatban pedig $g(n) - g(n-1)$ alkalommal fordul elő. Ezen kívül

$$g(n) - g(n-1) = (f(n) + 2n + 1) - (f(n-1) + 2n - 1) = f(n) - f(n-1) + 2,$$

tehát n valóban pontosan kettővel többször fordul elő az (y_k) sorozatban, mint az (x_k) -ban. □