

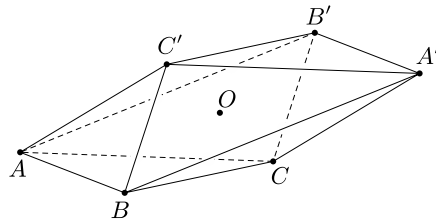
Megoldás. Felhasználjuk a következő ismert tételt: bármely konvex poliédernek van háromszög lapja, vagy olyan csúcsa, amelyre pontosan három él illeszkedik. (Lásd például: Sklarszkij–Csencov–Jaglom: *Válogatott fejezetek és tételek az elemi matematika köréből* 3.; 44. feladat. (17. old.).) Így elegendő a következő két esetet vizsgálni.

I. eset: Tegyük fel, hogy az A csúcsra pontosan három él illeszkedik: AB , AC és AD . Ekkor az A csúcsra illeszkedő három lapsík $\langle ABC \rangle$, $\langle ABD \rangle$ és $\langle ACD \rangle$, ahol $\langle \cdot \rangle$ értelemszerűen a meghatározott síkot jelöli. A csúcsoknak az O szimmetriaközéppontra vonatkozó tükörképei legyenek értelemszerűen A' , B' , C' és D' . A feltétel szerint minden A' -től különböző csúcs, így B' , C' és D' is illeszkedik valamely A -ra illeszkedő lapsíkra. Világos, hogy B és B' nem illeszkedhet közös lapsíkra, ezért $B' \in \langle ACD \rangle$. A szimmetria miatt $\langle BD'A'C' \rangle$ is lapsík, vagyis A' illeszkedik az $\langle ACD \rangle$ -kal párhuzamos, B -re illeszkedő síkra. Hasonló megfontolással láthatjuk, hogy A' illeszkedik az $\langle ABD \rangle$ -kal párhuzamos, C -re illeszkedő síkra; valamint az $\langle ABC \rangle$ -kal párhuzamos, D -re illeszkedő síkra is. Nyertük, hogy A' éppen az AB , AC és AD élek által feszített paralelepipedon A -val szemköztü csúcsa; B' , C' és D' a paralelepipedon további csúcsai. Azt is megmutattuk, hogy $\langle ABC'D \rangle$, $\langle ABD'C \rangle$ és $\langle ACB'D \rangle$, valamint ezek tükörképei: $\langle A'B'CD' \rangle$, $\langle A'B'DC' \rangle$ és $\langle A'C'BD' \rangle$ mind lapsíkok, így a poliéder szükségképpen az $ABCD A'B'C'D'$ paralelepipedon.

II. eset: Tegyük fel, hogy ABC egy háromszöglap. A szimmetriaközéppontot továbbra is jelölje O , az ABC lap tükörképe legyen értelemszerűen $A'B'C'$.

Első lépésként belátjuk, hogy az A , B , C , A' , B' és C' pontok éppen egy paralelepipedon lapközéppontjai. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, ekkor a szimmetria miatt $\overrightarrow{OA'} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB'} = -\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OC'} = -\mathbf{c}$. Tekintsük azt a nyolc pontot, amelyekbe az O -ból mutató vektorok $\pm\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \pm \mathbf{c}$ alakúak. Ezek egy olyan paralelepipedon csúcsai, amelynek lapközéppontjai A , B , C , A' , B' és C' . Ezt triviálisan teljesülő vektorazonosságok segítségével igazolhatjuk, a részletek végig gondolását az Olvasóra bízunk.

Megmutatjuk, hogy a poliéderünknek az A , B , C , A' , B' és C' pontoktól különböző csúcsa nem lehet. Tegyük fel, hogy D egy további csúcs. A feltétel szerint D az A , B , C , A' , B' és C' pontok mindegyikével illeszkedik egy közös lapra, vagyis a DA , DB , DC , DA' , DB' és DC' szakaszok mind a poliéder felszínén haladnak, továbbá D szükségképpen szigorúan az $\langle ABC \rangle$ és $\langle A'B'C' \rangle$ síkok közé esik (hiszen a feltevés szerint ABC és $A'B'C'$ háromszöglapok). Nyilvánvaló, hogy $D \notin \langle BCB'C' \rangle$, továbbá feltehető, hogy D a $BCB'C'$ sík A -val átellenes oldalára esik (különben A és A' szerepét felcseréljük az indoklásban). A DA szakasz a feltevés szerint a $BCB'C'$ paralelogrammát legfeljebb a határán metszheti, ezért a D pontot vagy az $\langle ABC' \rangle$ vagy az $\langle ACB' \rangle$ elválasztja O -tól (ide értve azt is, hogy esetleg D rajta van az $\langle ABC' \rangle$ vagy az $\langle ACB' \rangle$ síkok valamelyikén). Ismét az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy D -t az $\langle ABC' \rangle$ választja el O -tól. Ez viszont azt is jelenti, hogy az $\langle A'B'C \rangle$ egyazon nyílt félterébe esik D és O . Összességében azt kaptuk, hogy D benne van a $B'C$, $B'C'$ és $B'A'$ közös B' kezdőpontú félegyenesek által meghatározott nyílt „térnyolcadban”. Ebből következik, hogy a $D'B'$ szakasz metszi az $ABCA'B'C'$ poliéder belsejét, amivel ellentmondásra jutottunk.



Ezzel az állítást beláttuk.