

Megoldás. Ha a tetszőleges valós szám, akkor $f(a)$ értékét csak $f(1-a)$ határozza meg, hiszen $(x+2)+(-x-1)=1$. Vegyünk egy tetszőleges y számot. Helyettesítsünk a függvényegyenletbe $x = y$ -t:

$$(y+1) \cdot f(y+2) - 2(y+2) \cdot f(-y-1) = 3y^2 + 8y + 3.$$

Ugyanezzel az y -nal legyen $x = -y - 3$:

$$\begin{aligned} (-y-2) \cdot f(-y-1) - 2(-y-1) \cdot f(y+2) &= 3(-y-3)^2 + 8(-y-3) + 3, \\ 2(y+1) \cdot f(y+2) - (y+2) \cdot f(-y-1) &= 3y^2 + 18y + 27 - 8y - 24 + 3, \\ 4(y+1) \cdot f(y+2) - 2(y+2) \cdot f(-y-1) &= 6y^2 + 20y + 12. \end{aligned}$$

Vonjuk ki ebből az első egyenletet:

$$3(y+1) \cdot f(y+2) = 3y^2 + 12y + 9,$$

azaz

$$3(y+1) \cdot f(y+2) = 3(y+1)(y+3).$$

Ha $y \neq -1$, akkor oszthatunk $3(y+1)$ -gyel:

$$f(y+2) = y+3.$$

Azt kaptuk, hogy ha $y \neq -1$, vagyis $x \neq 1$, akkor $f(x) = x+1$.

Az $f(1)$ értékét abból kaphatjuk csak meg, ha az eredeti függvényegyenletben x -et -1 -nek vagy -2 -nek választjuk. Azonban mindkét esetben $f(1)$ együtthatója 0, így értéke nem határozható meg az egyenletből. Tehát

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \neq 1, \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$