Megoldás. Nincs ilyen szám: bármely a-ra létezik olyan x, amelyre a két érték nem relatív prím.

A fenti állítás igazolásához elég a páratlan a-kat vizsgálni, hiszen páros a esetén minden páratlan x-re x^2+3 és $(x+a)^2+3$ egyaránt páros, így nem relatív prímek egymáshoz.

Megmutatom, hogy bármely páratlan a-ra $x=\dfrac{a^2-a+12}{2}$ esetén a két kérdéses érték nem relatív prím. ($\dfrac{a^2-a+12}{2}$ mindig pozitív egész, mert a^2-a, és így a^2-a+12 is mindig páros és értelemszerűen pozitív.) Azonos átalakításokkal:

$$\begin{aligned}
2x=a^2-a+12,\quad 2x+a=a^2+12,\quad 2ax+a^2=a^3+12a,&\\
2a^2x-12a=2a^2x+a^3-\big(a^3+12a\big)=a\big(2ax+a^2\big)-\big(2ax+a^2\big)&=\\
=(a-1)\big(2ax+a^2\big)&,\\
a^2x-6a=\frac{a-1}{2}\big(2ax+a^2\big)&,\\
2a\big(x^2+3\big)=2ax^2+6a=2ax^2+a^2x-\big(a^2x-6a\big)&=\\
=x\big(2ax+a^2\big)-\frac{a-1}{2}\big(2ax+a^2\big)=\left(x-\frac{a-1}{2}\right)\big(2ax+a^2\big)&,
\end{aligned}$$

így

$$x^2+3=\frac{x-\frac{a-1}{2}}{2}(2x+a).$$

Mivel a páratlan, 4-gyel osztva 1-et vagy 3-at adhat maradékul. Az előbbi esetben $x=\dfrac{a(a-1)+12}{2}$ páros, ahogy $\dfrac{a-1}{2}$ is. Így $x-\dfrac{a-1}{2}$ páros, tehát $\dfrac{x-\frac{a-1}{2}}{2}$ egész. Az utóbbi esetben pedig $x=\dfrac{a(a-1)+12}{2}$ páratlan, ahogy $\dfrac{a-1}{2}$ is. Így $x-\dfrac{a-1}{2}$ páros, tehát $\dfrac{x-\frac{a-1}{2}}{2}$ akkor is egész. Így $(2x+a)$ mindig osztója $x^2+3=\dfrac{x-\frac{a-1}{2}}{2}(2x+a)$-nak.

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
(x+a)^2+3=x^2+3+2ax+a^2=\frac{x-\frac{a-1}{2}}{2}(2x+a)+a(2x+a)&=\\
=\left(\frac{x-\frac{a-1}{2}}{2}+a\right)(2x+a)&;
\end{aligned}$$

ez szintén osztható $(2x+a)$-val, ami 1-nél nagyobb egész. Tehát x^2+3 és $(x+a)^2+3$ valóban nem relatív prímek.