

Megoldás. Az egyenletrendszer szimmetrikus, így ha találunk egy megoldás-hármaszt, akkor annak összes permutációja is megoldás.

A második egyenletben a 2-es szorzó helyére írjuk be az első egyenlet bal oldalát, majd szorozzunk be és rendezzünk nullára:

$$\begin{aligned}xyz &= (x + y + z)(xy + yz + zx), \\xyz &= 3xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2, \\0 &= 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2.\end{aligned}$$

Ez a szimmetrikus kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}0 &= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x^2 + y^2 + 2xy) = (x + y)(xy + zx + yz + z^2) = \\&= (x + y)(y + z)(z + x).\end{aligned}$$

Szorzat csak abban az esetben lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Ha $x + y = 0$, akkor az első egyenletből $z = 2$, továbbá a második egyenlet állítása teljesül, mert $yz + zx$ is nulla. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Az egyik ismeretlen 2, a másik kettő pedig egymás ellentettje:

$$x = -y, \quad z = 2; \quad y = -z, \quad x = 2; \quad z = -x, \quad y = 2.$$