

I. megoldás. Válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy az ABC háromszög körülírt körének O középpontja az origóba kerüljön, a csúcsok koordinátái pedig legyenek $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ és $C(c_1, c_2)$. Ekkor a BC oldal felezőpontja $F_A((b_1+c_1)/2, (b_2+c_2)/2)$, és így az AF_A súlyvonal Thálesz-körének középpontja $O_A((2a_1+b_1+c_1)/4, (2a_2+b_2+c_2)/4)$.

Az ABC körülírt körének, illetve az AF_A súlyvonal Thálesz-körének közös húrja AA_1 , ennek felezőmerőlegesére illeszkednek az O és O_A középpontok, ezért az AA_1 -re A -ban állított merőleges normálvektora például

$$\vec{n}_A = 4\vec{OO_A}^{(90^\circ)} = (-(2a_2 + b_2 + c_2), 2a_1 + b_1 + c_1).$$

Bevezetve az $m_1 = a_1 + b_1 + c_1$ és $m_2 = a_2 + b_2 + c_2$ rövidítéseket, az AA_1 -re A -ban állított merőleges egyenletére

$$-(m_2 + a_2)x + (m_1 + a_1)y = -(m_2 + a_2)a_1 + (m_1 + a_1)a_2 = m_1a_2 - m_2a_1$$

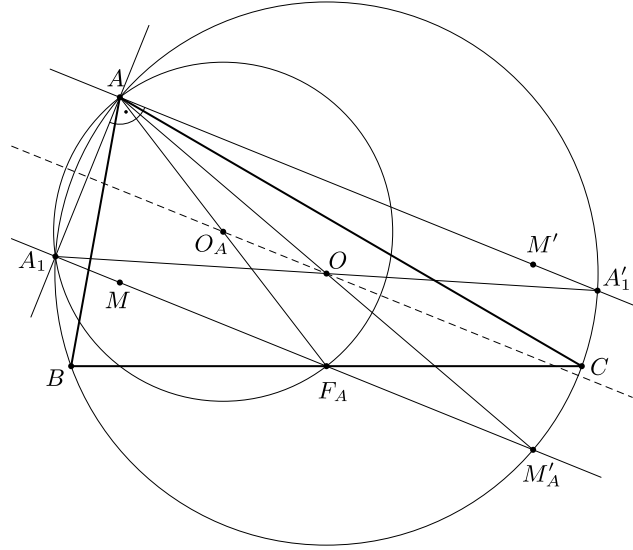
adódik. Hasonlóan a BB_1 -re B -ben, illetve CC_1 -re C -ben állított merőlegesek egyenletei rendre

$$-(m_2 + b_2)x + (m_1 + b_1)y = m_1b_2 - m_2b_1$$

és

$$-(m_2 + c_2)x + (m_1 + c_1)y = m_1c_2 - m_2c_1.$$

Tekintsük az $M'(-m_1, -m_2)$ pontot. Behelyettesítve a kapott egyenletekbe azonnal adódik, hogy M' mindhárom egyenesre illeszkedik, amivel a feladat állítását beláttuk.



II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Jól ismert tény, hogy az ABC háromszög M magasságpontjának az F_A pontra vonatkozó M'_A tükörképe éppen ABC körülírt körének A -val átellenes pontja, vagyis az A csúcs O -ra vonatkozó tükörképe. Így a Thálesz-tétel miatt egyrészt $AA_1M'_A \angle = 90^\circ$, másrészt – mivel A_1 illeszkedik az AF_A átmérőjű körre is – $AA_1F_A \angle = 90^\circ$. Az eddigiekből következik, hogy az A_1 , M , F_A és M'_A pontok mind illeszkednek az AA_1 egyenesre A_1 -ben állított merőlegesre.

Legyenek az A_1 és M pontok O -ra vonatkozó tükörképei A'_1 és M' . Mivel M illeszkedik az $A_1M'_A$ egyenesre, M' illeszkedik AA'_1 -re. Viszont ismét a Thálesz-tétel miatt AA'_1 éppen az AA_1 -re A -ban állított merőleges egyenes. Hasonlóan megmutatható, hogy M' illeszkedik a BB_1 -re B -ben állított merőlegesre, valamint a CC_1 -re C -ben állított merőlegesre, amivel az állítást beláttuk.

Megjegyzés: Szintén jól ismert tény, hogy az I. megoldásban választott koordinátarendszer esetén $M(m_1, m_2)$ éppen ABC magasságpontja, így onnan is kiolvasható, hogy a szóbanforgó egyenesek közös pontja éppen M tükörképe O -ra.