

Megoldás. Legyenek a háromszög csúcsai $A(7; 3)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, továbbá jelölje a súlypontot S , a magasságpontot pedig M .

Ismert, hogy a háromszög súlypontjának x , illetve y koordinátája a háromszög csúcspontjai x , illetve y koordinátáinak számtani közepe. Ennek alapján:

$$\frac{7 + b_1 + c_1}{3} = 5, \quad \text{illetve} \quad \frac{3 + b_2 + c_2}{3} = -\frac{5}{3}.$$

A két egyenletből adódik: $b_1 + c_1 = 8$ és $b_2 + c_2 = -8$.

Mivel M a magasságpont, ezért $\overrightarrow{MA}(4; 4)$ merőleges $\overrightarrow{BC}(c_1 - b_1; c_2 - b_2)$ -re. Tekintsük a két vektor skaláris szorzatát, ami a merőlegesség miatt 0. A skaláris szorzatukat a következő módon írhatjuk fel a vektorok koordinátáival: $4 \cdot (c_1 - b_1) + 4 \cdot (c_2 - b_2) = 0$. Ebből adódik, hogy $(c_1 + c_2) - (b_1 + b_2) = 0$.

Összeadva a súlypont koordinátáit felíró két egyenlettel kapjuk, hogy $c_1 + c_2 = 0$, amiből következik, hogy $b_1 + b_2 = 0$. Vagyis $b_1 = -b_2$ és $c_1 = -c_2$. Innentől a következő jelölést fogjuk használni: $b_1 = b$ és $c_1 = c$.

Hasonlóan $\overrightarrow{MA}$ -hoz és $\overrightarrow{BC}$ -hez, $\overrightarrow{CA}(7 - c; 3 + c)$ és $\overrightarrow{BM}(3 - b; b - 1)$ is merőlegesek egymásra. Írjuk fel e két vektor skaláris szorzatát (amely szintén 0) a vektorok koordinátáival:

$$\begin{aligned}(7 - c)(3 - b) + (3 + c)(b - 1) &= 0, \\ 21 - 7b - 3c + bc + 3b - 3 + bc - c &= 0, \\ bc - 2b - 2c + 9 &= 0.\end{aligned}$$

A súlypont koordinátáinak felírásából adódó egyenletből fejezzük ki c -t: $c = 8 - b$. Ezt írjuk be az imént kapott egyenletbe:

$$\begin{aligned}b(8 - b) - 2b - 2(8 - b) + 9 &= 0, \\ 8b - b^2 - 2b - 16 + 2b + 9 &= 0, \\ b^2 - 8b + 7 &= 0.\end{aligned}$$

Ez egy másodfokú egyenlet b -re. A megoldóképlet felhasználásával: $b = 1$ vagy $b = 7$.

Ha $b = 1$, akkor a másik két csúcs koordinátái: $(1; -1)$ és $(7; -7)$.

Ha $b = 7$, akkor ugyanazt a két pontot kapjuk, b -t és c -t felcserélve.

Megjegyzés. A legtöbben a honlapon található megoldás gondolatmenetét követték, melyben BC felezőpontját, majd az $\overrightarrow{MA}$ normálvektor segítségével a BC egyenesét írjuk fel, utána a köré írt kör középpontjának koordinátáit az Euler-egyenes segítségével határozzuk meg, majd a köré írt kör egyenletét felírva a kör és a BC egyenes metszéspontjainak koordinátáit számoljuk ki.