

I. megoldás. A megoldás során az alábbi szóhasználatot élünk. Azt mondjuk, hogy a b pozitív egész az a pozitív egészet *felülről dominálja*, ha a osztója b -nek, és *alulról dominálja*, ha $b + 1$ osztója $(a + 1)$ -nek. (Minden pozitív egész tehát felülről és alulról is dominálja önmagát.) A b egész akkor *dominálja* a -t, ha b felülről vagy alulról dominálja a -t. Az X halmaz pedig akkor *dominálja* az Y halmazt, ha Y minden y eleméhez található olyan x az X -ből, amely dominálja y -t. Végül, pozitív egészek egy Z halmazát akkor nevezzük *függetlennek*, ha Z egyetlen eleme sem dominálja Z egy másik elemét. Az imént bevezetett terminológia segítségével a feladat állítása úgy fogalmazható meg, hogy a pozitív egészek minden véges A halmazának van olyan független B részhalmaza, amely dominálja A -t.

Tekintsük az A halmaz mindazon C részhalmazait, melyekre

(a) C független, másfelől

(b) ha A valamely x eleme alulról dominálja C egy elemét, akkor C felülről dominálja x -et.

Létezik a fenti tulajdonságokat teljesítő C halmaz, hisz az üreshalmaz például ilyen. Válasszuk a B halmazt ezen C halmazok közül úgy, hogy B a lehető legtöbb elemét dominálja felülről az A halmazban. Azt állítjuk, hogy egy eképpen választott B halmaz rendelkezik a feladatban előírt tulajdonságokkal. Mivel B -t függetlennek választottuk, ezért csupán azt kell igazolni, hogy B dominálja a teljes A halmazt. Indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy B mégsem dominálja A -t.

Legyen tehát a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, és legyen $B' := B \setminus D(a) \cup \{a\}$, ahol $D(a)$ az a osztóinak halmazát jelöli. Megmutatjuk, hogy B választásának ellentmondva a B' halmaz amellelt, hogy több elemet dominál felülről, mint B , teljesíti az (a) és (b) tulajdonságokat is.

A konstrukcióból adódóan B' az A halmaz minden olyan elemét felülről dominálja, amely elemeket B felülről dominál, és ezen túl B' felülről dominálja a -t is. Ezért B' több elemet dominál felülről, mint B . A B részhalmazaként $B' \setminus \{a\}$ független, továbbá az a választásából adódóan $B' \setminus \{a\}$ nem dominálja a -t. Sőt, a sem dominálja $B' \setminus \{a\}$ egyetlen elemét sem: alulról a B halmaz (b) tulajdonsága miatt, felülről pedig B' definíciójából adódóan. Ezért a B' halmaz csakugyan független.

Végül, a (b) tulajdonság igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy x alulról dominálja B' egy y elemét. Ha mármost $y \in B$, akkor a (b) tulajdonság miatt B felülről dominálja x -et, így B' is, tehát teljesül a (b) tulajdonság. Ha pedig $y \notin B$, akkor $y = a$ és az alulról történő dominálás miatt $x < y$. Mivel a az A halmaz legkisebb olyan eleme, amit B nem dominál, ezért B dominálja x -et. Ha B felülről dominálja x -et, akkor B' is felülről dominálja x -et, a (b) tulajdonság teljesül. Ha pedig B egy z eleme alulról dominálja x -et, akkor mivel x alulról dominálja a -t, z is alulról dominálja a -t. Ez azt jelenti, hogy B mégiscsak dominálja a -t, ellentétben az a választásával. A kapott ellentmondás pedig azt igazolja, hogy B' -re teljesül a (b) tulajdonság, és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban bevezetett szóhasználatot tovább bővítjük. Pozitív egészek egy véges H halmaza *tetejének* nevezzük azt a $H^\uparrow$ halmazt, melyet H mindazon h elemei alkotnak, amelyet nem dominál felülről a H egyetlen h -től különböző eleme sem. Hasonlóan, a H halmaz $H^\downarrow$ -val jelölt *alja* a H azon h elemeiből áll, amelyet a H -nak h -től különböző eleme nem dominál alulról. Világos, hogy $H^\uparrow$ felülről, $H^\downarrow$ pedig alulról dominálja H -t, továbbá, hogy H tetejének egyik eleme sem dominálja H tetejének egy másik elemét felülről, illetve H aljának egyetlen eleme sem dominálja H aljának egy másik elemét alulról.

Szükségünk lesz még az alábbi megfigyelésre. Ha egy X halmaz alulról dominálja az Y halmazt, továbbá az Y alulról dominálja Z -t, akkor X is alulról dominálja Z -t. Legyen ugyanis $z \in Z$ tetszőleges. Az Y és Z viszonya folytán létezik olyan $y \in Y$, amelyre $y + 1$ osztója $(z + 1)$ -nek. Mivel X alulról dominálja Y -t, ezért X -nek van olyan x eleme, amelyre $x + 1$ osztja $(y + 1)$ -et. Ám ekkor $x + 1$ osztója $(z + 1)$ -nek is, azaz X alulról dominálja Z minden elemét.

A továbbiakban megadunk egy véges eljárást, amely tetszőleges A halmazhoz talál egy, a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező B részhalmazt. Legyen

$$A_0 := A, \quad B_0 := A_0^\uparrow \quad \text{és} \quad X_0 := B_0 \setminus B_0^\downarrow.$$

Ha már meghatároztuk az A_i , B_i és X_i halmazokat, akkor legyen

$$A_{i+1} := A_i \setminus X_i, \quad B_{i+1} := A_{i+1}^\uparrow \quad \text{és} \quad X_{i+1} := B_{i+1} \setminus B_{i+1}^\downarrow.$$

Figyeljük meg, hogy B_{i+1} az A_{i+1} teteje lévén felülről dominálja A_{i+1} -et és a $B_i^\downarrow$ alulról dominálja B_i -t, így X_i -t is. Ugyancsak a definícióból adódóan $B_i^\downarrow = B_i \setminus X_i \subseteq B_{i+1}$, ezért B_{i+1} alulról dominálja $B_i^\downarrow$ -t, így a $B_i^\downarrow$ által alulról dominált X_i -t is. Világos, hogy $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, így az A halmaz végeessége miatt $A_k = A_{k+1}$ teljesül valamely k -ra. Ez azt jelenti, hogy $X_k = \emptyset$, azaz $B_k = B_k^\downarrow$. Mivel $B_k^\uparrow = (A_k^\uparrow)^\uparrow = A_k^\uparrow = B_k$, ezért B_k független.

Megmutatjuk, hogy a $B = B_k$ halmaz megfelel a feladat feltételeinek. Láttuk, hogy B_k független, így csupán azt kell bizonyítanunk, hogy A -t is dominálja. Korábban láttuk, hogy B_k az A_k -t felülről dominálja. Elegendő tehát annyit bizonyítani, hogy B_k alulról dominálja az $A \setminus A_k = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}$ halmazt. Láttuk azt is, hogy B_k alulról dominálja az X_{k-1} halmazt. Mivel $B_{k-1} \subseteq B_k \cup X_{k-1}$, ezért B_k a B_{k-1} -et is alulról dominálja. Hasonlóan, B_{k-1} alulról dominálja X_{k-2} -t, így B_{k-2} -t is, tehát B_k is alulról dominálja B_{k-2} -t. Ugyanez az érvelés mutatja, hogy B_k alulról dominálja X_i -t és B_i -t minden $0 \leq i \leq k$ -ra. Mindezt összevetve kapjuk, hogy B_k alulról dominálja az $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}$ halmazt. Ezzel pedig beláttuk, hogy a $B = B_k$ halmaz rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. $\square$