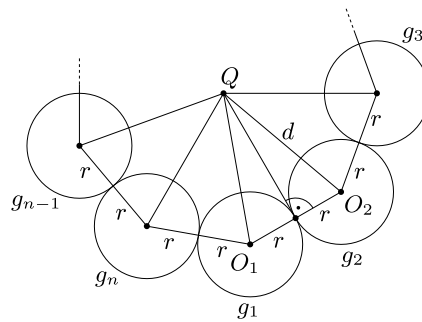


$$(2) \quad \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}} \right) < \sin \varphi < \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} 0^\circ} \right) = \frac{1}{2}.$$



2. ábra

A bal oldalon szereplő $\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}$ értéket a 3. ábrán látható 1 befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszöget felhasználva számoljuk ki. Mivel $AB = BC = 1$, ezért $AC = \sqrt{2}$. Ha az A -ból induló szögfelező a BC oldalt D -ben metszi, akkor egyrészt $BD = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}$, másrészt a szögfelezőtétel szerint $BD/DC = AB/AC$, ebből pedig a $BD + DC = BC$ összefüggést is figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

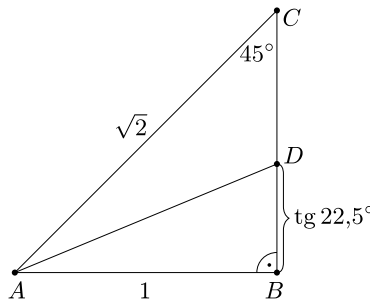
Ezért a (2) egyenlőtlenség bal oldalát átalakítva

$$(3) \quad \sin \varphi > \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{2}{1 + (\sqrt{2} - 1)} \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

adódik. Tudjuk, hogy az $x \mapsto \sin x$ függvény is szigorúan monoton nő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ezért a (2) és (3) egyenlőtlenségekből $\varphi = \frac{180^\circ}{n}$ -re az alábbi korlátok adódnak:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} < \frac{180^\circ}{n} < \arcsin \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad 11,95^\circ < \frac{180^\circ}{n} < 30^\circ,$$

vagyis $6 < n < 16$.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy az $n = 7, 8, \dots, 15$ értékekre léteznek is megfelelő kúpok. Az (1) egyenletből mindegyik n értékhez meghatározhatjuk a hozzá tartozó α_n szöget, ami az n -re vonatkozó egyenlőtlenségek miatt 0° -nál nagyobb, de 45° -nál kisebb lesz. Ezután pedig r ismeretében R is, s így a kúp is meghatározható.

Megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy $n = 6$ esetén számolásunkból $R = r$ adódik, azaz ebben az esetben a R sugarú gömb éppen „elfér” a 6 db r sugarú gömb közt, nem magasodik ki közülük, ezért nem kapunk megfelelő kúpot. Ha pedig $n = 16$, akkor a R sugarú gömb „túlnyúlik” a kis gömböket tartalmazó, középpontjaik síkjára merőleges alkotójú legszűkebb egyenes körhengeren, ezért nem kapunk megfelelő kúpot.