

**Megoldás.** Mivel tengely körüli forgatásnál pontosan a tengely pontjai fixek, és az oktaéder  $K$  középpontja is fix, a lehetséges tengelyek illeszkednek az oktaéder középpontjára. Így minden ilyen tengely az oktaéder felszínét pontosan két ( $K$ -ra szimmetrikusan elhelyezkedő)  $P$  és  $P'$  pontban metszi. Három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy ez a két pont csúcs, egy-egy él belső pontja, vagy egy-egy lap belső pontja.

1. eset, ha  $P$  csúcs. Ilyen egyenesből összesen három van, a szemközti csúcspárokat összekötő egyenesek. Az ezekre vonatkozó  $90^\circ$ -os forgatások megfelelőek. Ezt elegendő a csúcsokra leellenőrizni:  $P$  és  $P'$  fixen maradnak, a maradék négy csúcs pedig éppen egy négyzet négy csúcsa, amin a  $PP'$  egyenes körüli  $90^\circ$ -os forgatás a négyzet középpontja körüli  $90^\circ$ -os forgatásként hat, vagyis a csúcsok tényleg ciklikusan egymás képei.

2. eset, ha  $P$  egy  $AB$  él belső pontja. Az  $AB$  él elforgatott képe szintén egy él. Továbbá mivel  $P$  a forgatás során fix, az  $AB$  él forgatott képe is illeszkedik  $P$ -re. Ez csak úgy teljesülhet, ha  $AB$  képe önmaga, így  $A$  elforgatott képe  $B$  (mivel  $A$  nem lehet fix). Ebből következik, hogy  $P$  szükségképpen az  $AB$  él felezőpontja.

Két szemközti élfelező pontot összekötő egyenesből 6 darab van, minden ezekre vonatkozó  $180^\circ$ -os forgatás megfelelő. Valóban, a  $P$ -t tartalmazó  $AB$ , illetve a  $P'$ -t tartalmazó  $A'B'$  élek végpontjait a forgatás felcseréli, míg a maradék két csúcsot összekötő szakasz  $PP'$ -t merőlegesen metszi  $K$ -ban, így a forgatás ezt a két csúcsot is egymásba viszi.

3. eset, ha  $P$  az  $ABC$  szabályos háromszöglap belső pontja. A 2. esethez hasonlóan látható, hogy az  $ABC$  háromszög elforgatott képe szükségképpen önmaga. Mivel az  $ABC$  csúcsai nem fixek, így két eset lehet:  $A' = B$ ,  $B' = C$  és  $C' = A$ ; vagy  $A' = C$ ,  $C' = B$  és  $B' = A$ . Mindkét esetben a  $P$  fix pont szükségképpen mindhárom csúcstól egyenlő távolságra esik, vagyis  $P$  az  $ABC$  lap középpontja.

Szemközti lapok középpontjait összekötő egyenesből 4 darab van, az ezekre vonatkozó  $120^\circ$ -os forgatások megfelelőek. Valóban, a  $PP'$  tengely az  $ABC$  lapot merőlegesen metszi, ezért a  $120^\circ$ -os  $PP'$  körüli forgatás  $ABC$  síkjában egy  $P$  körüli  $120^\circ$ -os forgatásként hat, vagyis  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcsokat egymásba viszi. A szemköztes lapon hasonlóan érvelhetünk.

Összesen 13 darab megfelelő tengely létezik.