

I. megoldás.¹

A szimmetria miatt a B és D csúcsok esetében a keresett valószínűség ugyanakkora, ezt a közös értéket jelölje p , a C csúcs esetén pedig a valószínűség legyen q . Könnyen belátható, hogy a bolha 1 valószínűséggel előbb-utóbb minden csúcsra eljut, és így $2p + q = 1$. Ugyanis 3 egymást követő ugrás során $1/4$ valószínűséggel végig egyforma irányba megy – és ily módon minden csúcsot meglátogat –, ezért annak a valószínűsége, hogy $3k$ ugrás után még nem járt mindenhol, legfeljebb $(3/4)^k$, ami tart a 0-hoz, ha $k \rightarrow \infty$.

Most megmutatjuk, hogy $p = q$, ehhez annak a valószínűségét vizsgáljuk meg, hogy C lesz az utolsóként meglátogatott csúcs. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy az első ugrás után B -ben van. Azt kell meghatároznunk, mekkora valószínűséggel jut el innen előbb D -be, mint C -be. Ha D -be még C előtt jut el, akkor közben A -ban is járnia kell, vagyis pont azok az ugrás-sorozatok teljesítik a feltételt, amelyeknél a B -ből induló ugrás-sorozat során C -be, vagyis egy szomszédos csúcsba jut el utoljára. A szimmetria miatt ennek a valószínűsége p , ezért valóban $q = p$.

Tehát $p = q = 1/3$, vagyis a keresett valószínűség mindhárom csúcs esetén $1/3$.

II. megoldás. Annak az esélye, hogy B lesz az utolsó, ugyanannyi, mint annak, hogy D , mivel a négyzet szimmetrikus az AC átlóra.

Nézzük, mennyi annak az esélye, hogy a D csúcs az utolsó. Ehhez az szükséges, hogy először a B -re lépjen, azután pedig ugráljon az A és a B között, majd egyszer lépjen C -re. Ekkor biztos, hogy a D csúcs lesz az utolsó (ha feltehetjük, hogy egyszer véget ér az ugrálás – ennek bizonyítását lásd az I. megoldásban). Tehát a lehetséges utak így néznek ki: $A - B - C - \dots$, $A - B - A - B - C - \dots$, $A - B - A - B - A - B - C - \dots$, $\dots$. Ezek valószínűsége rendre:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{4}\right)^3,$$

majd ugyanúgy mindegyik az előzőnek az $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ -szerese. Ezen valószínűségek összege:

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1}.$$

Mivel $n \rightarrow \infty$ esetén $\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$, ezért a valószínűségek összegének határértéke $n \rightarrow \infty$ esetén

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot (0 - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Ugyanígy $\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy a B csúcs az utolsó. Így a C csúcsra jutó valószínűség $P_C = 1 - P_B - P_D = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés. Néhányan egyenletet írtak fel pl. P_D -re. Ha a bolha az A csúcsból a D -re ugrik, akkor biztosan nem a D az utolsó. Ha a B -re ugrik és utána a C -re, akkor már biztosan a D az utolsó. Ha a B után visszaugrik az A -ra, akkor onnantól számítva ismét P_D a valószínűség. Ezt összeadva:

$$P_D = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_D,$$

amiből

$$\frac{3}{4}P_D = \frac{1}{4} \quad \text{és így} \quad P_D = \frac{1}{3}$$

következik.

¹ A www.komal.hu oldalon található megoldás. A feladatok megoldása általában pár nappal a határidő után honlapunkon megtalálható.