

Baran Zsuzsanna megoldása. Be fogjuk látni, hogy a legkisebb ilyen b pozitív egész a $b = 6$.

A feladat az, hogy minél kevesebb szomszédos pozitív egész számot kell találnunk úgy, hogy azok közül mindegyik P -jének legyen közös prímosztója valamelyik másik elem P -jével. Ehhez megvizsgáljuk, hogy közeli számok P -jeinek milyen közös prímosztója lehet, azaz hogy adott kicsi pozitív egész x -ekre milyen p prímre lehet $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+x)$ (n pozitív egész). Az $x = 1, 2, 3$ és 4-et fogjuk megvizsgálni.

Először is, mivel $n^2 + n = n(n+1)$ páros, ezért $P(n)$ mindig páratlan, így p nem lehet 2.

$x = 1$ -re:

$$\begin{aligned}(n^2 + n + 1; (n+1)^2 + (n+1) + 1) &= (n^2 + n + 1; 2n + 2) = \\ &= (n^2 + n + 1; n + 1) = (n^2; n + 1) = 1.\end{aligned}$$

Azaz $P(n)$ -nek és $P(n+1)$ -nek nem lehet közös prímosztója.

$x = 2$ -re:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2 + n + 1 \equiv (n+2)^2 + (n+2) + 1 = n^2 + 5n + 7 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 4n + 6 \pmod{p}, \\ 2n &\equiv -3 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 4n^2 + 4n + 4 \equiv (-3)^2 + 2(-3) + 4 = 7 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Így csak akkor lehetséges $p \mid P(n)$ és $p \mid P(n+2)$, ha $p = 7$ és $2n \equiv -3 \equiv 4 \pmod{7}$, így $n \equiv 2 \pmod{7}$. Ilyenkor tényleg fennáll az oszthatóság: $2^2 + 2 + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

$x = 3$ -ra:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2 + n + 1 \equiv (n+3)^2 + (n+3) + 1 = n^2 + 7n + 13 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 6n + 12 \pmod{p}, \\ 3n &\equiv -6 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 9n^2 + 9n + 9 \equiv (-6)^2 + 3 \cdot (-6) + 9 = 27 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Így csak a $p = 3$ jöhet szóba.

Ekkor $1^2 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, de $0^3 + 0 + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, így az $n \equiv 1 \pmod{3}$ jó, de más nem. Tehát $P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet, mégpedig ha $n \equiv 1 \pmod{3}$.

$x = 4$ -re:

$$\begin{aligned}0 &\equiv n^2 + n + 1 \equiv (n+4)^2 + (n+4) + 1 = n^2 + 9n + 21 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 8n + 20 \pmod{p}, \\ 2n &\equiv -5 \pmod{p}, \\ 0 &\equiv 4n^2 + 4n + 4 \equiv (-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 4 = 19 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Így csak a $p = 19$, $2n \equiv -5 \equiv 14 \pmod{19}$, azaz $n \equiv 7 \pmod{19}$ jöhet szóba. Ez megfelelő is: $7^2 + 7 + 1 \equiv 9^2 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod{19}$. Tehát $P(n)$ és $P(n+4)$ közös prímosztója csak a 19 lehet, mégpedig ha $n \equiv 7 \pmod{19}$.

Most az eddigiek alapján próbáljunk létrehozni egy megfelelő 6 elemű halmazt. Szeretnénk egy olyan a -t találni, hogy $P(a+1)$ -nek és $P(a+5)$ -nek, $P(a+2)$ -nek és $P(a+4)$ -nek, illetve $P(a+3)$ -nak és $P(a+6)$ -nak legyen közös prímosztója.

Legyen $b = 6$ és $a \equiv 1 \pmod{3}$, $a \equiv 6 \pmod{19}$ és $a \equiv 0 \pmod{7}$ (ennek a kínai maradéktétel szerint van pozitív egész megoldása).

Ekkor $a+1 \equiv 7 \pmod{19}$, így $19 \mid P(a+1)$, $P(a+1+4)$, míg $a+2 \equiv 2 \pmod{7}$, így $7 \mid P(a+2)$, $P(a+2+2)$, végül $a+3 \equiv a+6 \equiv 1 \pmod{3}$, így $3 \mid P(a+3)$, $P(a+6)$.

Így a fenti a mellett a $\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+6)\}$ halmaz mindegyik eleméhez található egy másik elem, amivel van közös prímosztója, azaz a halmaz illatos.

Tegyük fel, hogy van kisebb megfelelő b is, azaz létezik $b \leq 5$ pozitív egész, amihez létezik a pozitív egész, hogy $\{P(a+1), \dots, P(a+b)\}$ illatos.

Nem lehet $b = 2$ vagy $b = 3$, mert $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$ -hez és $P(a+3)$ -hoz is.

Nem lehet $b = 4$, mert akkor $P(a+2)$ relatív prím $P(a+1)$ -hez és $P(a+3)$ -hoz, így $P(a+4)$ -gyel kell közös prímosztója legyen, ami csak a 7 lehet ($P(n)$ és $P(n+2)$ közös prímosztója csak a 7 lehet). Hasonlóan $P(a+3)$ -nak $P(a+1)$ -gyel kell közös prímosztója legyen, de ez is csak a 7 lehet. Ez viszont azt jelentené, hogy $P(a+1)$ és $P(a+2)$ egyaránt oszthatóak 7-tel, ami ellentmondás.

Nem lehet $b = 5$ sem, mert akkor $P(a+3)$ relatív prím a szomszédjaihoz, így $P(a+1)$ -gyel vagy $P(a+5)$ -tel kell közös prímosztója legyen, ez a prímosztó pedig csak a 7 lehet. Ha $7 \mid P(a+3)$, akkor $7 \nmid P(a+2)$, $P(a+4)$. Eközben $P(a+2)$ relatív prím a szomszédjaihoz és mivel nem osztható 7-tel, ezért relatív prím $P(a+4)$ -hez is. Ekkor $P(a+5)$ -tel kell közös prímosztója legyen, ami viszont csak a 3 lehet ($P(n)$ és $P(n+3)$ közös prímosztója csak a 3 lehet).

Hasonlóan $P(a+4)$ -nek $P(a+1)$ -gyel kell közös prímosztója legyen, ami viszont szintén csak a 7 lehet. Ekkor azonban $7 \mid P(a+1)$ és $7 \mid P(a+2)$, ami ellentmondás.

Tehát mégsem lehet $b \leq 5$, a legkisebb megfelelő b szám a $b = 6$.