

Megoldás. A törtet felírhatjuk így:

$$\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}} = \frac{10x + y}{10y + z} = \frac{x}{z}.$$

Mivel a szám kétjegyű, így x és y nem lehet 0, valamint z sem, mivel egy tört nevezője nem lehet 0. Így $1 \leq x, y, z \leq 9$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\begin{aligned}(10x + y) \cdot z &= (10y + z) \cdot x, \\ 10xz + yz &= 10xy + xz, \\ 9xz &= y \cdot (10x - z).\end{aligned}$$

A bal oldal osztható 9-cel, így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lenni vele.

Három lehetőség van.

(1) $9 \mid y$. Ez csak úgy lehet, hogy $y = 9$. Így ekkor:

$$\begin{aligned}xz &= 10x - z, \\ z(x + 1) &= 10x, \\ z &= \frac{10x}{x + 1}.\end{aligned}$$

x lehetséges értékeit behelyettesítve z értéke csak $x = 1, 4$ és 9 esetén lesz egész szám (z értéke rendre 5, 8 és 9). Ezek a megoldások mind jók, tehát a megfelelő törtek: $\frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{99}{99}$.

(2) $9 \mid (10x - z) = 9x + (x - z)$, azaz $9 \mid x - z$. Itt $0 \leq |x - z| \leq 8$ miatt csak $x = z$ esetén van megoldás, és ezek mind jók. Mivel a jobb oldali tört értéke ekkor mindig 1, így csak $x = y = z$ lehet. Tehát a megfelelő törtek: $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \frac{33}{33}, \frac{44}{44}, \frac{55}{55}, \frac{66}{66}, \frac{77}{77}, \frac{88}{88}, \frac{99}{99}$.

(3) $3 \mid y$ és $3 \mid (10x - z)$. Itt két lehetőség is van: $y = 3$ és $y = 6$ ($y = 9$ -et már megnéztük).

Ha $y = 3$, akkor

$$\begin{aligned}9xz &= 3(10x - z), \\ 3xz &= 10x - z, \\ z(3x + 1) &= 10x, \\ z &= \frac{10x}{3x + 1}.\end{aligned}$$

Itt csak $x = 3$ esetén lesz z egész szám, ekkor $x = y = z = 3$, ami a $\frac{33}{33}$ törtet adja megoldásul.

Ha $y = 6$, akkor

$$\begin{aligned}9xz &= 6(10x - z), \\ 3xz &= 20x - 2z, \\ z(3x + 2) &= 20x, \\ z &= \frac{20x}{3x + 2}.\end{aligned}$$

Itt az $x = 1, 2$ és 6 számok adnak megoldást, ekkor z értéke rendre 4, 5 és 6. A megfelelő törtek: $\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{66}{66}$. Tehát ezek a törtek a megoldások:

$$\frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \frac{33}{33}, \frac{44}{44}, \frac{55}{55}, \frac{66}{66}, \frac{77}{77}, \frac{88}{88}, \frac{99}{99}, \frac{16}{64}, \frac{26}{65}.$$