

I. megoldás. Rendeljünk mindegyik élhez egy-egy különböző prímszámot, ez megtehető, mivel végtelen sok prímszám van.

Legyen a $\mathcal{H}_i$ halmazban azoknak a prímeknek az összes pozitív egész kitevős hatványa, amelyek azokon az éleken vannak, amik a $\mathcal{H}_i$ -hez tartozó csúcsból indulnak ki.

Ha két csúcs össze van kötve egy éllel, akkor mindkét halmazban benne vannak az élhez rendelt prímszám pozitív egész kitevős hatványai, tehát a két halmaz metszete végtelen.

Ha két csúcs nincsen éllel összekötve, akkor különféle élekhez tartozó prímszám hatványai szerepelnek csak a két halmazban, a metszetük üres halmaz.

Ez a konstrukció megfelel a feladat feltételeinek.

II. megoldás. Először véges részhalmazokat rendelünk a csúcsokhoz úgy, hogy két ilyennek a metszete pontosan akkor üres, ha a megfelelő csúcsok nincsenek éllel összekötve. Ezt a csúcsok száma szerinti indukcióval láthatjuk be: egy vagy két csúcsra ez nyilvánvaló. Ha pedig $n - 1$ csúcsú gráfokra igaz, és a halmazok uniójának legnagyobb eleme k , akkor az n -edik csúcs szomszédaihoz tartozó részhalmazokat bővítsük rendre $(k + 1)$ -gyel, $(k + 2)$ -vel stb.; az n -edik csúcsához pedig tartozzon a $\{k + 1, k + 2, \dots\}$ halmaz.

A G gráf csúcsaihoz rendelt halmazok „végtelenítése”: ha a véges halmazok uniójának legnagyobb eleme M , akkor minden részhalmazhoz és annak mindegyik t elemére vegyük hozzá az összes $t + iM$ számot, valamennyi $i > 1$ egészre. Ha az így kapott (végtelen) halmazok közül kettőnek t közös eleme, akkor van végtelen sok közös elemük is: $t + M$, $t + 2M$, $\dots$. Ha pedig két diszjunkt véges halmaz végtelenre bővítettjeinek $t_1 + iM = t_2 + jM$ közös eleme lenne, akkor $|t_1 - t_2| = |i - j|M$, ahol $0 < t_1, t_2 \leq M$ és $t_1 \neq t_2$ miatt a bal oldal értéke M -nél kisebb pozitív szám, a jobb oldal viszont nagyobb mint M , ami ellentmondás.