Megoldás. Kisebb esetekkel való számolással megsejthetjük, hogy páros sok emelet esetén: $2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^3}}}}}}} > 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^2}}}}}}}$.

A bizonyításhoz használjuk a Lemmát, miszerint: $2^{3^n} > 3^{2^{n-1}}$, ahol $n \geq 1$ egész szám.

A Lemmát teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n = 1$-re igaz $(8 > 3)$, ez az alapja az indukciónak.

Tegyük fel, hogy $2^{3^k} > 3^{2^{k-1}}$, ekkor bizonyítjuk, hogy $2^{3^{k+1}} > 3^{2^k}$. Vegyük észre, hogy $2^{3^{k+1}} = \left(2^{3^k}\right)^3$, valamint $3^{2^k} = \left(3^{2^{k-1}}\right)^2$. Ha tehát a nagyobb oldalt a köbére emeljük, a kisebb oldalt pedig a négyzetére, akkor megkapjuk a bizonyítandó állítást. Mivel a két oldal 1-nél nagyobb, a hatványozás során növekednek. Az indukciós lépés tehát igaz, mert nagyobb szám nagyobb hatványa nagyobb, mint kisebb szám kisebb hatványa.

Tehát $2^{3^n} > 3^{2^{n-1}}$, ha $n \geq 1$.

Most bizonyítsuk az eredeti állítást, ugyanúgy teljes indukcióval. Az alap itt: $2^{3^{2^3}} > 3^{2^{3^2}}$, ugyanis $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6561} > 16^{1640} > 10^{1640}$ és $3^{2^{3^2}} = 3^{512} < 10^{512}$, azaz a bal oldali szám legalább 1640, a jobb oldali viszont legfeljebb 512 számjegyű.

Az indukciós lépés az, hogy ha $s_k = 2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} > t_k = 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, ahol a két számban egyaránt k darab 2-es szerepel, akkor $s_{k+1} = 2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} > 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = t_{k+1}$, ahol a két számban egyaránt $k+1$ darab 2-es szerepel.

$s_k - t_k \geq 1$, mert teljesül a feltevés és s_k, t_k egészek. A Lemma alapján így $2^{3^{s_k}} > 3^{2^{s_k-1}} \geq 3^{2^{t_k}}$. Ez pedig éppen a belátandó állítás, mert mindkét oldalon 1-gyel nőtt a 2-esek száma.

Beláttuk tehát általánosan, hogy ha a $2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^3}}}}}}}, 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^2}}}}}}}$ számok ugyanannyi kettest és hármast tartalmaznak és mindegyikből legalább kettőt, akkor teljesül, hogy $2^{3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^3}}}}}}} > 3^{2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^2}}}}}}}$. Ennek egy speciális esete az, ami a feladatban szerepel: 50-50 darab kettes és hármas.