

Tetszőleges olyan  $n = x_1 + x_2 + \dots$  felbontást, amit az  $a(n)$ -ben számolunk meg, kódoljunk az alábbi módszerrel. Minden  $i$ -re írjuk fel az  $x_i$  kettes számrendszerbeli alakját (az  $i$ -edik sorba  $x_i$ -t írva) úgy, hogy a legnagyobb helyiértéken álló számjegyek egymás alá kerüljenek. Mivel a  $2^k - 1$  szám kettes számrendszerbeli alakja pontosan  $k$  db egyesből áll, a kapott felírásban kizárólag egyesek fognak szerepelni, és az egyesekből álló sorok hossza lefelé haladva nem csökken. Ebben a felírásban minden egyeshez egy jól meghatározott *érték* tartozik: ha egy egyestől jobbra  $\ell$  további egyes található, akkor az adott egyes értéke pontosan  $2^\ell$ . A felírásból adódóan a kódolásból úgy olvasható ki az  $x_i$ , hogy az  $i$ -edik sorban álló egyesek értékét összeadjuk.

Ha a most felírt kódolásban oszloponként adjuk össze a felírt egyesek értékét, akkor egy  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontást kapunk, ahol  $y_i$  jelöli a jobbról az  $i$ -edik oszlopban álló egyesek összértékét. Világos, hogy  $y_{i+1} \geq 2 \cdot y_i$ , hiszen  $y_i$  minden egyesétől balra áll egy  $y_{i+1}$ -hez tartozó egyes, ami pontosan kétszer annyit ér, mint a tőle jobbra álló. Ez azt jelenti, hogy az  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontást  $b(n)$ -ben számoltuk meg. Azt kaptuk, hogy minden  $a(n)$ -ben leszámolt felbontáshoz tartozik egy jól meghatározott  $b(n)$ -ben leszámolt felbontás.

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy a fenti transzformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a kétféle típusba tartozó felbontások között. Ezt pedig úgy mutatjuk meg, hogy minden  $b(n)$ -ben leszámolt  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontáshoz konstruálunk egy  $a(n)$ -ben leszámolt  $n = x_1 + x_2 + \dots$  felbontást, amit a fenti transzformáció pontosan az  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontásba visz.

Legyen tehát adott egy  $b(n)$ -ben leszámolt  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontás. A jobb szélső oszlopban helyezzünk el  $y_1$  db egyest egymás felett. Ha már elkészítettünk  $i$  oszlopot, akkor ezektől balra úgy konstruáljuk meg az  $(i + 1)$ -edik oszlopot, hogy az  $i$ -edik oszlop minden egyese mellé balról írunk egy egyest, továbbá még  $y_{i+1} - 2 \cdot y_i$  további egyest írunk ezen egyesek fölé. Ez  $y_{i+1} \geq 2 \cdot y_i$  miatt mindig megtehető. Világos, hogy ha most minden egyesnek a fent definiált értéket adjuk, akkor a  $j$ -edik oszlopbeli egyesek összértéke pontosan  $y_i$  lesz minden értelmes  $i$ -re. Ha pedig a felírt egyeseket soronként olvassuk ki kettes számrendszerbeli számokként, akkor ezen számok az  $n$ -nek egy  $a(n)$ -ben leszámolt  $x_1 + x_2 + \dots$  felbontását adják, amit (a konstrukció miatt) a fent leírt transzformáció pontosan az  $n = y_1 + y_2 + \dots$  felbontásba visz. Mi pedig éppen ezt akartuk bizonyítani.  $\square$

*Megjegyzés.* A megoldás rámutat arra is, hogyan keletkezett a feladat. A jól ismert Ferrers-diagram konjugálásának mintájára teremtünk bijekciót a kétféle partíciótípus között azzal a különbséggel, hogy míg a Ferrers-diagramban minden jel értéke 1, ez a feladatban egy kettőhatvány, ami a diagramból egyértelműen kikövetkeztethető. Ha tehát Ferrers-diagramként (azaz „egyes számrendszerben”) értelmezzük az

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

reprezentációt, akkor az a  $14 = 1 + 3 + 3 + 7$  partíciót jelenti, aminek konjugáltja a

$$14 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 4.$$

Ugyanez a diagram a feladatbeli kódolás szerint az  $a(n)$ -ben leszámolt  $142 = 1 + 7 + 7 + 127$  partíciót kódolja, amihez a  $b(n)$ -ben leszámolt

$$142 = 1 + 2 + 4 + 8 + 18 + 36 + 73$$

partíció tartozik.