

A binomiális együtthatók mintájára legyen

$$B(n, 0) = 1, \quad \text{és} \quad B(n, k) = \frac{a_n a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-k+1}}{a_k a_{k-1} \cdot \dots \cdot a_1}, \quad \text{ha} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Az n szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $B(n, k)$ egész szám.

A $k = 0$ és $k = n$ esetekben az állításunk triviális, hisz $B(n, 0) = B(n, n) = 1$. Ez a megfigyelés egyúttal az $n = 1$ esetet is bizonyítja. Tegyük fel tehát, hogy $0 < k < n$, és $B(n', k') \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $1 \leq k' \leq n' < n$ értékre.

Az (1) definícióból láthatjuk, hogy

$$B(n, k) = \frac{a_n}{a_k} \cdot B(n-1, k-1) = \frac{a_n}{a_{n-k}} \cdot B(n-1, k).$$

A feladat feltétele szerint az a_n szám osztható a_k és a_{n-k} legnagyobb közös osztójával. Ezért vannak olyan x, y egész számok, amelyekre $a_k x + a_{n-k} y = a_n$. Ezt beírva (2)-be,

$$\begin{aligned} B(n, k) &= \frac{a_k x + a_{n-k} y}{a_n} \cdot B(n, k) = x \cdot \frac{a_k}{a_n} B(n, k) + y \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n} B(n, k) = \\ &= x \cdot B(n-1, k-1) + y \cdot B(n-1, k). \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint a jobb oldalon álló számok egészek, így $B(n, k)$ is egész. $\square$

Megjegyzések. 1. Az $1, 2, 3, \dots$ sorozatra triviálisan fennáll a kívánt feltétel. A feladat erre a konkrét sorozatra éppen a binomiális együtthatók egész tulajdonságát állítja. A kitűzött feladat tehát arra mutat rá, hogy a szorzatok hányadosának egész tulajdonsága már egy, az $a_1, a_2, \dots$ sorozatról kikötött jóval gyengébb feltételből is következik.

2. Több versenyző próbálkozott annak becslésével, hogy egy p prím milyen kitevőn osztja a számlálót, illetve a nevezőt. Nem nagyon nehéz megmutatni, hogy tetszőleges q prímszámra legalább annyi többszöröse van az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}$ számok között, mint az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \cdot \dots \cdot a_k$ számok között. Ebből a megfigyelésből pedig könnyen adódik a feladat megoldása.