

Megoldás. a) Legyen a kezdetben mozgó test tömege m , a sebessége pedig v . Ezek kifejezhetők az energia és a lendület segítségével:

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad I = mv,$$

ahonnan

$$m = \frac{I^2}{2E} \quad \text{és} \quad v = \frac{2E}{I}.$$

A két test tömegközéppontjának sebessége az ütközés előtt

$$v_0 = \frac{I}{M+m} = \frac{I}{M + \frac{I^2}{2E}} = \frac{2EI}{2EM + I^2},$$

és ez a sebesség az ütközés során sem változik. Az M tömegű, kezdetben álló test az ütközés előtt v_0 sebességgel közeledik a tömegközéppont felé. A tökéletesen rugalmas ütközés után ugyanekkora nagyságú sebességgel fog távolodni a tömegközépponttól, tehát a „laboratóriumi rendszerben” a sebessége

$$u = 2v_0 = \frac{4EI}{2EM + I^2}$$

lesz. A kezdetben álló testnek átadott energia tehát

$$W(E, I) = \frac{1}{2}Mu^2 = 8M \left(\frac{EI}{2ME + I^2} \right)^2.$$

b) Adott I_0 lendület esetén a $0 \leq E < \infty$ intervallumon $W(E)$ szigorúan monoton növekvő függvény, hiszen a fenti képletben a zárójelben álló kifejezés reciproka

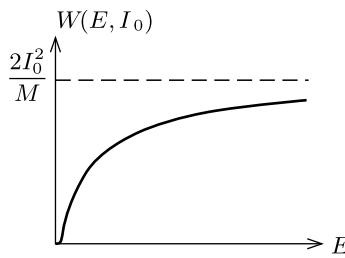
$$\frac{1}{\sqrt{W}} \sim \frac{2ME + I_0^2}{EI} = \text{állandó} + \frac{\text{állandó}}{E},$$

ami E növekedtével monoton csökken. A függvény határértéke $E \gg I_0^2/(2M)$ esetén $2I_0^2/M$.

Megjegyzés. A függvény monoton növekedése a derivált előjeléből is leolvasható:

$$W'(E) = \frac{16MI_0^4E}{(2ME + I_0^2)^3} > 0.$$

Az 1. ábra az átadott energiát mutatja az ütköző test E energiájának függvényében, rögzített I_0 lendület mellett.



1. ábra

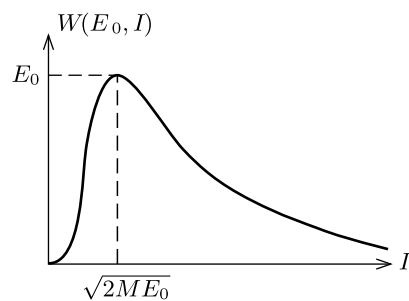
Adott E_0 energia mellett a $W(E, I)$ függvénynek $I = \sqrt{2ME_0}$ értéknél maximuma van, és a legnagyobb átadott energia éppen E_0 (2. ábra). Ezt a függvény deriváltjának előjelváltásából olvashatjuk le, de elemi úton, a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből is beláthatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{W}} = \frac{1}{E_0\sqrt{8M}} \left(I + \frac{2ME_0}{I} \right) \geq \frac{1}{E_0\sqrt{8M}} \cdot 2\sqrt{I \frac{2ME_0}{I}} = \frac{1}{\sqrt{E_0}},$$

vagyis $W \leq E_0$, és az egyenlőség akkor áll fenn, amikor

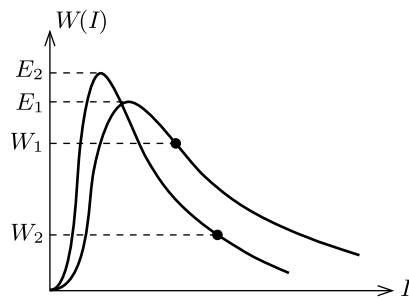
$$I = \frac{2ME_0}{I}, \quad \text{azaz} \quad I = \sqrt{2ME_0}.$$

Ebben az esetben a két test tömege megegyezik, és az ütköző test a teljes mozgási energiáját átadja az eredetileg álló másik testnek.



2. ábra

c) A 3. ábra az átadott energiát mutatja I függvényében két esetben: egy E_1 energiájú testnél, illetve egy másik, $E_2 > E_1$ energiájú testnél.



3. ábra

Az ábrán jól látható, hogy a kisebb energiájú test által átadott W_1 energia lehet nagyobb, mint a nagyobb energiájú test által átadott W_2 energia.