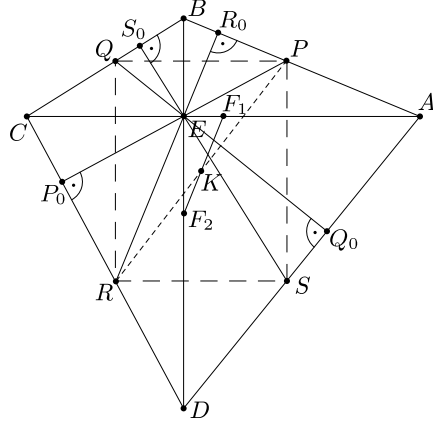


Megoldás. Legyenek az E pontból az oldalakra állított merőlegeseknek a szemközti oldalakkal vett metszéspontjai P , Q , R és S , a merőlegesek talppontjai pedig P_0 , Q_0 , R_0 és S_0 , az *ábra* szerint.



Az E pontból merőlegeseket állítottunk az oldalakra, így a BR_0ES_0 , CS_0EP_0 , DP_0EQ_0 és AQ_0ER_0 négyszögek két-két szemközti szöge derékszög, tehát húrnégyszögek.

Belátjuk, hogy a P , R_0 , S_0 , P_0 pontok egy körön vannak. A BEC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága ES_0 , ezért $BES_0\angle = BCE\angle$. Másrészt mivel BR_0ES_0 és CS_0EP_0 húrnégyszögek:

$$BR_0S_0\angle = BES_0\angle = BCE\angle = S_0P_0E\angle.$$

Az $S_0P_0E\angle$ a $PR_0S_0P_0$ négyszög belső szöge, míg a $BR_0S_0\angle$ a szemközti csúcshoz tartozó külső szög. A négyszög valóban húrnégyszög.

Hasonló gondolatmenettel igazoljuk, hogy $R_0S_0P_0R$ szintén húrnégyszög. A BCE háromszögben – az előző esetnek megfelelően – az átfogóhoz tartozó magasság két hasonló derékszögű háromszögre bontja a háromszöget, így felhasználva az előbbi két húrnégyszöget is:

$$S_0R_0E\angle = S_0BE\angle = S_0EC\angle = S_0P_0C\angle.$$

Az $R_0S_0P_0R$ négyszög R_0 -hoz tartozó belső szöge egyenlő a P_0 -hoz tartozó külső szöggel, tehát ez a négyszög is húrnégyszög.

Abból, hogy a DP_0EQ_0 négyszög húrnégyszög, az is következik, hogy

$$EP_0Q_0\angle = EDQ_0\angle.$$

A DEA derékszögű háromszögben EQ_0 magasság, így $EDQ_0\angle = Q_0EA\angle$. Mivel AQ_0ER_0 húrnégyszög, azért $Q_0EA\angle = Q_0R_0A\angle$. Mindezekből:

$$PP_0Q_0\angle = EP_0Q_0\angle = EDQ_0\angle = Q_0EA\angle = Q_0R_0A\angle = Q_0R_0P\angle,$$

tehát $PR_0P_0Q_0$ húrnégyszög.

Az eddigiekből következik, hogy a P , R_0 , S_0 , P_0 , R és Q_0 pontok egy körön vannak.

Ugyanígy belátható, hogy a Q , P_0 , S , Q_0 , R_0 és S_0 pontok is egy körre illeszkednek.

Tehát mind a nyolc pont, Q , P_0 , R , S , Q_0 , P , R_0 és S_0 egy körön van.

Következő lépésként igazoljuk, hogy a $PQRS$ négyszög oldalai párhuzamosak az $ABCD$ négyszög átlóival. A négy párhuzamosság közül egyet fogunk megmutatni, a másik három analóg módon tárgyalható.

Az előző részben már több négyszögről láttuk, hogy húrnégyszög, sőt azt is sikerült igazolni, hogy a nyolc pont egy körön van. Emiatt R_0S_0QR húrnégyszög. A $CQR\angle$ külső szög, egyenlő a szemközti csúcshoz, R_0 -hoz tartozó belső szöggel, az S_0R_0E szöggel. Mivel BR_0ES_0 húrnégyszög kapjuk, hogy

$$S_0R_0E\angle = S_0BE\angle = CBD\angle.$$

A $CQR\angle$ és a $CBD\angle$ tehát egyenlők, és mivel egyik száruk közös, azért egyállású szögek: QR párhuzamos BD -vel. A fentiekből kapjuk, hogy a $PQRS$ négyszög téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak az $ABCD$ négyszög átlóival.

A megoldás befejezéséhez be kell még bizonyítani, hogy a téglalap átlóinak metszéspontja illeszkedik az $ABCD$ négyszög átlóinak felezőpontját összekötő szakaszra. Ezt az állítást, kihasználva az $ABCD$ négyszög átlóinak merőlegességét, vektorok segítségével igazoljuk.

Legyen az A , B , C , D , P , Q , R , S pontokba mutató helyvektorok kezdőpontja E , az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja. Legyen

$$\overrightarrow{EA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{EC} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{EB} = \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{ED} = \mu \mathbf{b},$$

ahol λ és μ negatív valós számok. Ismert, hogy amennyiben P az AB szakasz belső pontja, az $\overrightarrow{EP}$ helyvektor kifejezhető a csúcsokba mutató $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ helyvektorok segítségével úgy, hogy

$$\overrightarrow{EP} = x \cdot \mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b},$$

ahol az $x \in]0, 1[$. A PQ szakasz párhuzamos AC -vel, így az $\overrightarrow{EQ}$ vektort felbontva $\mathbf{b}$ -vel és $\lambda\mathbf{a}$ -val párhuzamos összetevőkre a $\mathbf{b}$ együttthatója meg kell, hogy egyezzen az előzővel:

$$\overrightarrow{EQ} = (1 - x) \cdot \mathbf{b} + x \cdot \lambda\mathbf{a}.$$

Innen már a további két csúcsba mutató helyvektorok felírása is azonnal adódik:

$$\overrightarrow{ER} = x \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - x) \cdot \mu\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{ES} = (1 - x) \cdot \mu\mathbf{b} + x \cdot \mathbf{a}.$$

Az AC átló F_1 felezőpontjára és a BD átló F_2 felezőpontjára:

$$\overrightarrow{EF_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}),$$

$$\overrightarrow{EF_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mu\mathbf{b}).$$

Vegyük most az F_1F_2 szakaszt és legyen ennek a szakasznak az $(1 - x) : x$ arányban osztó, belső pontja K . Ekkor a K pont helyvektora:

$$\overrightarrow{EK} = x \cdot \overrightarrow{EF_1} + (1 - x) \cdot \overrightarrow{EF_2} = \frac{1}{2}(x(1 + \lambda)\mathbf{a} + (1 - x)(1 + \mu)\mathbf{b}).$$

Végül tekintsük a $PQRS$ téglalap átlóinak közös felezőpontját. Ennek helyvektora az átló végpontjaiba mutató helyvektorok összegének a fele, pl.:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{EP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}(x \cdot \mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(x \cdot \lambda\mathbf{a} + (1 - x) \cdot \mu\mathbf{b}) = \overrightarrow{EK}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.