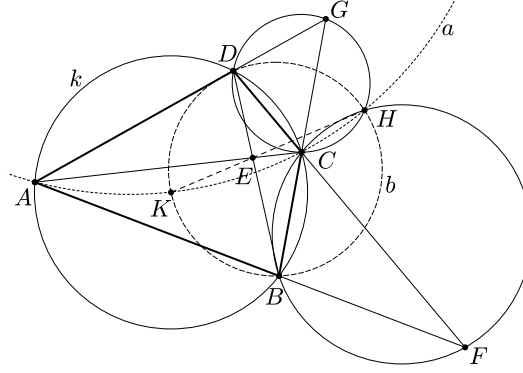


Megoldás. Először azt látjuk be, hogy a G, H, F pontok egy egyenesbe esnek.



$FHCB$ húrnégyszög, mivel mindegyik pontja rajta van a BFC háromszög köré írt körén. Hasonlóan $HGDC$ is húrnégyszög. Mindebből

$$\begin{aligned} FHC \sphericalangle &= 180^\circ - FBC \sphericalangle = CBA \sphericalangle, \\ CHG \sphericalangle &= 180^\circ - GDC \sphericalangle = CDA \sphericalangle. \end{aligned}$$

$CBA \sphericalangle + CDA \sphericalangle = 180^\circ$, hiszen $ABCD$ húrnégyszög. Tehát $FHC \sphericalangle + CHG \sphericalangle = 180^\circ$, így a G, H, F pontok valóban egy egyenesbe esnek.

Most belátjuk, hogy a $HCKA$, illetve a $HDKB$ négyszögek húrnégyszögek.

Az $ABCD$ húrnégyszög megváltoztatásával bizonyos szögek megváltozhatnak, de az, hogy a két négyszög húrnégyszög ekkor is analóg módon bizonyítható. (Ilyen eset lehet, ha például a K pont átkerül az AC szakasz B -vel átellenes oldalára.)

Ehhez a $CKA \sphericalangle + AHC \sphericalangle = 180^\circ$, illetve a $DKB \sphericalangle + BHD \sphericalangle = 180^\circ$ feltételeket kell igazolnunk.

A kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$$CKA \sphericalangle = 2 \cdot CBA \sphericalangle = 2\beta, \quad \text{valamint} \quad DKB \sphericalangle = 2 \cdot DAB \sphericalangle = 2\alpha.$$

Tehát elegendő belátnunk, hogy:

$$\begin{aligned} AHC \sphericalangle &= 180^\circ - 2\beta \quad \text{és} \quad BHD \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha, \\ AHC \sphericalangle &= 180^\circ - (FHC \sphericalangle + AHG \sphericalangle), \quad BHD \sphericalangle = 180^\circ - (FHB \sphericalangle + DHG \sphericalangle). \end{aligned}$$

Most pedig igazoljuk, hogy:

$$FHB \sphericalangle = DHG \sphericalangle = \alpha, \quad FHC \sphericalangle = AHG \sphericalangle = \beta.$$

$FHB \sphericalangle = FCB \sphericalangle$ az $FHCB$ húrnégyszögben, és

$$FCB \sphericalangle = 180^\circ - BCD \sphericalangle = DAB \sphericalangle = \alpha.$$

Ugyanígy $DHG \sphericalangle = DCG \sphericalangle = 180^\circ - BCD \sphericalangle = DAB \sphericalangle = \alpha$. A másik szögpárnál szükségünk lesz még egy húrnégyszögre, a $BHGA$ négyszögre. Ez a négyszög is húrnégyszög, hiszen

$$BHG \sphericalangle = 180^\circ - BHF \sphericalangle = 180^\circ - BCF \sphericalangle = BCD \sphericalangle = 180^\circ - DAB \sphericalangle,$$

és így $GAB \sphericalangle + BHG \sphericalangle = 180^\circ$. Tehát $GABH$ húrnégyszög, így:

$$AHG \sphericalangle = ABG \sphericalangle = ABC \sphericalangle = \beta.$$

Mivel $FHCB$ húrnégyszög:

$$CHF \sphericalangle = 180^\circ - FBC \sphericalangle = ABC \sphericalangle = \beta.$$

Tehát igazoltuk, hogy a $HCKA$ és a $HDKB$ négyszögek húrnégyszögek, így rátérhetünk a bizonyítandó állításra.

Legyen a $HCKA$ négyszög köré írt köre a , $HDKB$ -é b , $ABCD$ -é pedig k . Végezzünk k alapkörű inverziót¹, mely során a -t és b -t invertáljuk. Mindkét kör képe egyenes lesz, hiszen ezen körök átmennek k középpontján, K -n. Másrészt, mivel A, B, C, D egyaránt k pontjai, az inverzió ezeket helyben hagyja. Tehát a képe egy egyenes, mely átmegy az A és C pontokon – ez éppen az AC egyenes. Hasonlóan b képe a BD egyenes lesz. Ezek metszéspontja E . Az a és b invertálása során kaptunk egy olyan pontot, mely a és b inverzén is rajta van. Az inverzió két különböző ponthoz két különböző pontot rendel. Ez azt jelenti, hogy E az a és b közös pontjának inverze lesz. Az a és b két közös ponttal rendelkezik: H -val és K -val. Közülük K az alapkör középpontja, melynek nincs inverze. Ebből következik, hogy H inverze E , vagyis K, H és E egy egyenesen van.

¹ Az I. 324. feladat az inverzió bemutatása volt prezentáció segítségével:
<http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=I324&l=hu>.