

Megoldás. Legyen $x = y = 0$:

$$\begin{aligned}f(0 + 0) + f(0) \cdot f(0) &= 0^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0, \\f(0)^2 + f(0) &= 0, \\f(0) \cdot (f(0) + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamely tényezője nulla, így $f(0) = 0$ vagy $f(0) = -1$.

Legyen $y = 0$ és x tetszőleges:

$$\begin{aligned}f(x + 0) + f(x) \cdot f(0) &= x^2 \cdot 0^2 + 2x \cdot 0, \\f(x) + f(x) \cdot f(0) &= f(x) \cdot (1 + f(0)) = 0.\end{aligned}$$

Ha $f(0) = 0$, akkor a szorzat első tényezőjének kell nullának lennie:

$$f(x) = 0;$$

ez viszont nem megoldás például $x = y = 1$ -re:

$$\begin{aligned}f(2) + f(1)^2 &= 1^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1, \\0 &\neq 3.\end{aligned}$$

Tehát $f(0) = -1$.

Legyen $y = -x$:

$$\begin{aligned}f(x - x) + f(x) \cdot f(-x) &= x^4 - 2x^2, \\f(0) + f(x) \cdot f(-x) &= x^4 - 2x^2.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $f(0) = -1$:

$$\begin{aligned}f(x) \cdot f(-x) &= x^4 - 2x^2 + 1, \\f(x) \cdot f(-x) &= (x^2 - 1)^2.\end{aligned}$$

Legyen itt $x = 1$:

$$f(1)f(-1) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Ha $f(1) = 0$, akkor legyen $y = 1$ és x tetszőleges:

$$\begin{aligned}f(x + 1) + f(x) \cdot f(1) &= x^2 \cdot 1^2 + 2x \cdot 1, \\f(x + 1) + f(x) \cdot 0 &= x^2 + 2x, \\f(x + 1) &= x^2 + 2x.\end{aligned}$$

Tehát ekkor $f(x) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) = x^2 - 1$.

Ha $f(-1) = 0$, akkor legyen $y = -1$ és x tetszőleges:

$$\begin{aligned}f(x - 1) + f(x) \cdot f(-1) &= x^2 \cdot (-1)^2 + 2x \cdot (-1), \\f(x - 1) + f(x) \cdot 0 &= x^2 - 2x, \\f(x - 1) &= x^2 - 2x.\end{aligned}$$

Tehát ekkor is $f(x) = (x + 1)^2 - 2(x + 1) = x^2 - 1$.

Ez a megoldás valóban jó:

$$\begin{aligned}f(x + y) + f(x) \cdot f(y) &= (x + y)^2 - 1 + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = \\&= x^2 + 2xy + y^2 - 1 + x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = x^2y^2 + 2xy.\end{aligned}$$

Tehát az egyetlen ilyen f függvény az $f(x) = x^2 - 1$.