

**I. megoldás.** Megmutatjuk, hogy az első kifejezés a nagyobb, vagyis

$$2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \dots \cdot \log_3 2011 \cdot \log_3 2013 < \\ < \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \log_3 8 \cdot \dots \cdot \log_3 2012 \cdot \log_3 2014.$$

A bal oldalon álló szorzat minden tényezője pozitív, így az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$2 \cdot \sqrt{\log_3 3} \cdot \sqrt{\log_3 3 \cdot \log_3 5} \cdot \sqrt{\log_3 5 \cdot \log_3 7} \cdot \dots \cdot \\ \cdot \sqrt{\log_3 2011 \cdot \log_3 2013} \cdot \sqrt{\log_3 2013} < \\ < \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \log_3 8 \cdot \dots \cdot \log_3 2012 \cdot \log_3 2014.$$

Ha  $3 \leq n$ , akkor a  $0 < \log_3 n$  és a  $0 < \log_3(n+2)$  kifejezésekre alkalmazva a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\log_3 n \cdot \log_3(n+2)} \leq \frac{\log_3 n + \log_3(n+2)}{2}.$$

A  $\log_3 x$  függvény konkáv, így a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{\log_3 n + \log_3(n+2)}{2} \leq \log_3 \left( \frac{n + (n+2)}{2} \right) = \log_3(n+1),$$

ezért

$$\sqrt{\log_3 n \cdot \log_3(n+2)} \leq \log_3(n+1).$$

Ezt rendre  $n = 3, 5, \dots, 2011$ -re alkalmazva:

$$\sqrt{\log_3 3 \cdot \log_3 5} \cdot \sqrt{\log_3 5 \cdot \log_3 7} \cdot \dots \cdot \sqrt{\log_3 2011 \cdot \log_3 2013} \leq \\ \leq \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 2012,$$

így az állítás igazolásához elég a következőt belátnunk:

$$2 \cdot \sqrt{\log_3 3} \cdot \sqrt{\log_3 2013} < \log_3 2014.$$

Nyilván  $\sqrt{\log_3 2013} < \sqrt{\log_3 2014}$  és  $\log_3 3 = 1$ , emiatt elég a következőt igazolnunk:

$$2 < \sqrt{\log_3 2014},$$

$$4 < \log_3 2014,$$

$$3^4 = 81 < 2014$$

(felhasználva, hogy a  $\sqrt{x}$  és a  $\log_3 x$  függvény szigorúan monoton nő).

Ezzel beláttuk, hogy a két kifejezés közül valóban az első a nagyobb.

**II. megoldás.** Először a következő lemmát igazoljuk: Ha  $n > 1$  egész szám, akkor  $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ , azaz

$$\log_n(n+1) > \frac{\log_n(n+2)}{\log_n(n+1)},$$

illetve

$$(\log_n(n+1))^2 > \log_n(n+2).$$

Ez az  $y = n^x$  függvény szigorú monoton növekedése miatt ekvivalens azzal, hogy

$$n^{(\log_n(n+1))^2} > n^{\log_n(n+2)},$$

vagyis

$$(n+1)^{\log_n(n+1)} > n+2.$$

Legyen  $n = a$ ,  $1 = b$  és  $\log_n(n+1) = k > 1$ . Ekkor a belátandó egyenlőtlenség:

$$(a+b)^k > a^k + b^k.$$

Mivel  $(a+b)^k > 0$ , oszthatunk vele:

$$1 > \left( \frac{a}{a+b} \right)^k + \left( \frac{b}{a+b} \right)^k.$$

Mivel  $a, b > 0$ ,  $k > 1$ ,  $\frac{a}{a+b} < 1$  és  $\frac{b}{a+b} < 1$ , azért

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^k < \frac{a}{a+b}, \quad \text{és} \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^k < \frac{b}{a+b}, \quad \text{így}$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^k + \left(\frac{b}{a+b}\right)^k < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1;$$

ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Ezután belátjuk, hogy a feladatban megadott első kifejezés a nagyobb. Mivel mindkettő pozitív, ez nyilván ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \dots \cdot \log_3 2014}{2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \dots \cdot \log_3 2013} > 1,$$

vagyis az áttérési képlet alkalmazásával:

$$A = \log_3 4 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{2013} 2014 > 2.$$

Legyen  $B = \log_4 5 \log_6 7 \dots \log_{2014} 2015$ . A lemma miatt  $A > B$ , ezért

$$\begin{aligned} A^2 &> AB = \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{2013} 2014 \cdot \log_{2014} 2015 = \\ &= \log_3 4 \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 5} \cdot \dots \cdot \frac{\log_3 2014}{\log_3 2013} \cdot \frac{\log_3 2015}{\log_3 2014} = \log_3 2015 > 4, \end{aligned}$$

tehát valóban  $A > 2$ .