

Megoldás. Legyen $\angle KBC = \alpha$. Ekkor a feltételek szerint $\angle ABK = 2\alpha$. E szögek segítségével felírva az ABK és KBC háromszögek területét, kapjuk hogy

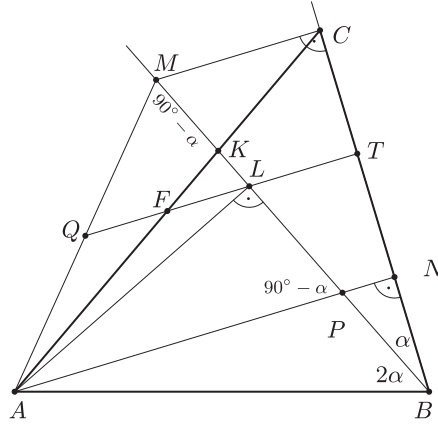
$$T_{ABK} = \frac{AB \cdot BK \cdot \sin 2\alpha}{2}, \quad \text{valamint}$$

$$T_{KBC} = \frac{BK \cdot BC \cdot \sin \alpha}{2}.$$

A két háromszög B csúcshoz tartozó magassága közös, B -vel szemközti oldalai aránya pedig $2 : 1$, mert K az AC oldal harmadolópontja. Ezért $T_{ABK} : T_{KBC} = 2 : 1$. Ebből a $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ azonosságot is felhasználva kapjuk, hogy

$$AB \cdot BK \cdot \sin \alpha \cos \alpha = BK \cdot BC \cdot \sin \alpha,$$

vagyis ($\sin \alpha \neq 0$ miatt) $\cos \alpha = \frac{BC}{AB}$.



Legyen M a B -ből induló BK félegyenesnek az a pontja, melyre $BM = BA$. Ekkor $\cos \alpha = \frac{BC}{BM}$, ezért $\angle BCM = 90^\circ$. Továbbá az ABM háromszög egyenlőszárú, szárszöge 2α , ezért alapon fekvő szögei $\angle MAB = \angle AMB = 90^\circ - \alpha$.

Legyen az A -ból BC -re állított merőleges talppontja N , az AN és BK szakaszok metszéspontja pedig P . A PNB derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α , ezért a másik hegyesszög $\angle BPN = 90^\circ - \alpha$. Ekkor $\angle MPA = 90^\circ - \alpha$ is, mert $\angle MPA$ és $\angle BPN$ csúcsszögek, tehát egyenlők. Ez azt jelenti, hogy az APM háromszög is egyenlőszárú, mert M -nél és P -nél lévő szögei megegyeznek. Ezért az alaphoz tartozó magassága, AL , felezi az MP alapot, tehát L az MP szakasz felezőpontja.

Legyen az AM szakasz felezőpontja Q . Ekkor QL az APM , QF pedig az AMC háromszög középvonala. A középvonalak párhuzamosak a háromszögek megfelelő oldalaival, azaz AP -vel, illetve MC -vel. E két utóbbi viszont egymással is párhuzamos, mert mindkettő merőleges BC -re. Tehát QF és QL is merőlegesek BC -re. Vagyis a Q -ból BC -re állított merőleges tartalmazza F -et és L -et is, ezért FL is merőleges BC -re, ami épp a bizonyítandó állítás.