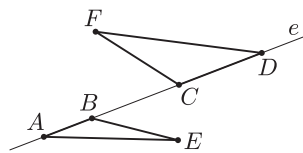


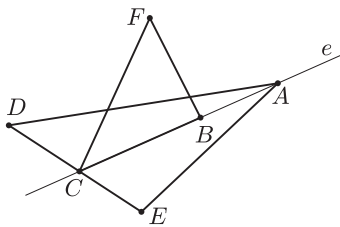
**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy  $m = 2k$ .

Először azt látjuk be, hogy ha van olyan egyenes, amelyik a  $3k$  pont közül legalább  $(2k + 1)$ -et tartalmaz, akkor a pontok nem oszthatók  $k$  darab hármas csoportba úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ez azonnal következik abból, hogy tetszőleges háromszög három csúcsa közül egy egyenes legfeljebb kettőt tartalmaz, ezért  $k$  darab különböző háromszög csúcsai közül legfeljebb  $2k$  darabot tartalmazhat bármely egyenes.

Ha nincs olyan egyenes, amelyik  $2k$ -nál többet tartalmaz a  $3k$  pont közül, akkor  $k$  szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a pontok  $k$  darab hármas csoportba oszthatók úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ha  $k = 1$ , akkor a feltételünk szerint a három pont nem kollineáris, ezért egy háromszög csúcsait alkotja, tehát ekkor igaz az állítás. A  $k = 2$  esetet is külön bizonyítjuk, mert az indukciós lépés során fel fogjuk használni, hogy a pontok száma legalább 6. Ha a pontok közül semelyik három nem kollineáris, akkor bárhogyan is osztjuk őket két csoportba, az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai lesznek. Ha a pontok közül pontosan négy, mondjuk  $A, B, C$  és  $D$  egy  $e$  egyenesre esik, a maradék kettő,  $E$  és  $F$  pedig nincs rajta  $e$ -n, akkor például  $\{A, B, E\}$ ,  $\{C, D, F\}$  jó beosztás (1. ábra). Végül ha a pontok közül semelyik négy nem kollineáris, de mondjuk  $A, B$  és  $C$  egy  $e$  egyenesre esik, akkor a maradék három pont közül válasszunk ki kettőt, legyenek ezek  $D$  és  $E$ . Feltehető, hogy a  $DE$  és  $e$  egyenesek metszéspontja nem  $A$ . Ekkor ha a hatodik pont  $F$ , akkor például  $\{A, D, E\}$ ,  $\{B, C, F\}$  jó beosztás (2. ábra).



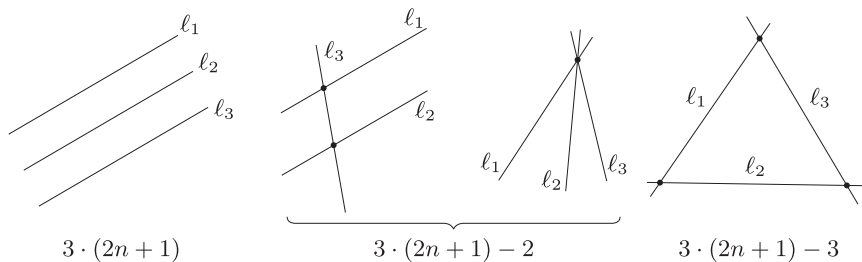
1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy az állítás igaz  $k = n > 1$ -re. Legyen adott  $3(n + 1)$  különböző pont úgy, hogy közülük legfeljebb  $2(n + 1)$  esik egy egyenesbe. Tekintsük azokat az egyeneseket, melyek a pontok közül legalább kettőt tartalmaznak. Legyen ezek száma  $N$ . (Az ilyen egyenesek száma véges, hiszen nyilván fennáll az  $N \leq \binom{3n+3}{2}$  egyenlőtlenség.) Jelölje ezeket az egyeneseket  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$ , és válasszuk úgy a számozást, hogy ha  $|\ell_i|$  az adott pontok közül azoknak a száma, melyeket az  $\ell_i$  egyenes tartalmaz, akkor minden  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  esetén teljesüljön az  $|\ell_i| \geq |\ell_{i+1}|$  egyenlőtlenség (a számozás nem egyértelmű, mert lehetnek olyan egyenesek, melyek ugyanannyi pontot tartalmaznak).

Először megmutatjuk, hogy  $|\ell_3| < 2n + 1$ . Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ha  $|\ell_3| \geq 2n + 1$ , akkor  $|\ell_2| \geq 2n + 1$  és  $|\ell_1| \geq 2n + 1$  is fennáll. Ezért e három egyenes az adott pontok közül legalább  $3(2n + 1) - 3 = 6n$  különbözőt tartalmaz, hiszen az egyeneseken lévő pontok közül legfeljebb az  $\ell_1 \cap \ell_2$ ,  $\ell_1 \cap \ell_3$  és  $\ell_2 \cap \ell_3$  pontokat számoltuk kétszer a  $3(2n + 1)$  összegben (3. ábra). Viszont  $n > 1$  miatt  $6n > 3n + 3$ , s ebből az ellentmondásból következik, hogy  $|\ell_3| < 2n + 1$ . Hasonló módon látjuk be, hogy  $|\ell_2| < 2n + 2$ . Ha ugyanis  $|\ell_2| \geq 2n + 2$ , akkor  $|\ell_1| \geq 2n + 2$ , ezért e két egyenes az adott pontok közül legalább  $2(2n + 2) - 1 = 4n + 3 > 3n + 3$  különbözőt tartalmaz, hiszen az egyeneseken lévő pontok közül legfeljebb az  $\ell_1 \cap \ell_2$  pontot számoltuk kétszer a  $2(2n + 2)$  összegben. Ebből az ellentmondásból következik, hogy  $|\ell_2| < 2n + 2$ .



3. ábra

Tehát  $|\ell_1| \leq 2n + 2$ ,  $|\ell_2| \leq 2n + 1$ , és ha  $i > 2$ , akkor  $|\ell_i| \leq 2n$  teljesül. Válasszunk ki az  $\ell_1$  egyenesen lévő adott pontok közül kettőt tetszőlegesen, és vegyünk hozzájuk harmadiknak az  $\ell_2$  egyenesen lévő adott pontok közül egy olyat, amelyik nincs rajta az  $\ell_1$  egyenesen. E három pont nyilván háromszöget alkot. A maradék  $(3n + 3) - 3 = 3n$  pontra pedig teljesül az indukciós feltevésünk, mert közülük semelyik  $2n$  nincs egy egyenesen. Hiszen továbbra is csak az  $\ell_i$  egyenesek tartalmazznak a pontok közül legalább kettőt, az  $\ell_1$ -en lévő maradék pontok száma legfeljebb  $(2n + 2) - 2 = 2n$ , az  $\ell_2$ -en lévő maradék pontok száma legfeljebb  $(2n + 1) - 1 = 2n$ , a többi egyenesre pedig  $|\ell_i| \leq 2n$  teljesül. Vagyis ezek a pontok beoszthatók  $n$  darab hármas csoportba úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ezért a  $3n + 3$  pont is beosztható a feltételeknek megfelelően, s ezzel állításunkat beláttuk.