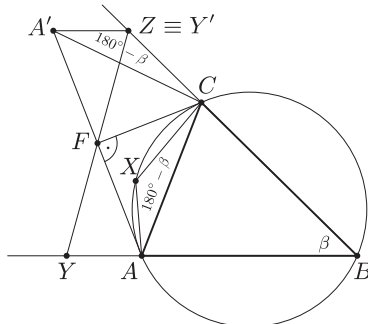


**Megoldás.** Legyen az  $YZ$  szakasz felezőpontja  $F$ . Jelölje az  $A$  és  $Y$  pontok  $F$ -re vonatkozó tükörképét  $A'$  és  $Y'$ . Ekkor  $Y' \equiv Z$ . Mivel bármely szakasz párhuzamos a középpontos tükörképével, ezért  $A'Z$  párhuzamos  $AY$ -nal, s így  $AB$ -vel (1. ábra). Ezért ha az  $ABC$  háromszög  $B$ -nél lévő szöge  $\beta$ , akkor  $A'ZB \sphericalangle = 180^\circ - \beta$ . Az  $ABCX$  négyszög húrnégyszög, ezért  $AXC \sphericalangle = 180^\circ - ABC \sphericalangle = 180^\circ - \beta$ . Tehát az  $AXC$  és az  $A'ZC$  háromszögek egybevágók, mert megegyezik egy szögük és az azt közrefogó két oldaluk, hiszen  $AX = AY = A'Z$  és  $CX = CZ$ . Vagyis  $AC = A'C$ , azaz a  $CA'A$  háromszög egyenlőszárú. Ezért alapjának  $F$  felezőpontját a  $C$  csúccsal összekötő egyenes az alap felezőmerőlegese, vagyis  $CF$  merőleges  $FA$ -ra. Tehát Thalész tételének megfordítása szerint  $F$  rajta van az  $AC$  szakasz  $k$  Thalész-körén.

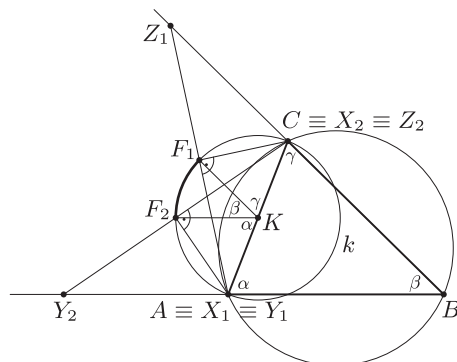


1. ábra

Meg kell még vizsgálnunk, hogy  $k$  mely pontjai állnak elő az  $YZ$  szakaszok felezőpontjaként. Legyen az  $ABC$  háromszög  $A$ -nál, illetve  $C$ -nél lévő szöge  $\alpha$ , illetve  $\gamma$ . Az  $X$  pont két szélső helyzete  $X_1 \equiv A$  és  $X_2 \equiv C$ . Az első esetben  $Y_1 \equiv A$  és  $F_1$  a  $CZ_1A$  egyenlőszárú háromszög  $Z_1A$  alapjának felezőpontja. Mivel  $Z_1CA \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$ , ezért  $F_1CA \sphericalangle = 90^\circ - \gamma/2$ . Ugyanígy kapjuk, hogy ha  $X_2 \equiv C$ , akkor  $F_2AC \sphericalangle = 90^\circ - \alpha/2$  (2. ábra). Ha  $k$  középpontja ( $AC$  felezőpontja)  $K$ , akkor az  $F_1KC$  és az  $F_2KA$  egyenlőszárú háromszögekből azt kapjuk, hogy

$$F_1KC \sphericalangle = 180^\circ - 2 \cdot F_1CA \sphericalangle = 180^\circ - 2 \cdot \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma,$$

és ugyanígy  $F_2KA \sphericalangle = \alpha$ , ezért  $F_1KF_2 \sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + \alpha) = \beta$ .



2. ábra

Ha  $X$  folytonosan mozog  $A$ -ból  $C$ -be, akkor  $F$  is nyilván folytonosan mozog  $F_1$ -ből  $F_2$ -be. Tehát a keresett mértani hely az  $AC$  szakasz Thalész körének a  $\beta$  középponti szögű  $F_1F_2$  íve.